

<i>Introduzione.....</i>	<i>2</i>
<i>Discretizzazione di una funzione continua.....</i>	<i>2</i>
<i>Teorema del campionamento o di Shannon.....</i>	<i>3</i>
<i>Osservazioni:.....</i>	<i>3</i>
<i>Le figure di Lissajous.....</i>	<i>4</i>
<i>Modulazione e Demodulazione di Ampiezza.....</i>	<i>5</i>
<i>Modulazione e Demodulazione CW.....</i>	<i>7</i>
<i>Modulazione e Demodulazione FM.....</i>	<i>9</i>
<i>Modulazione e Demodulazione PSK.....</i>	<i>11</i>
<i>Simulazione del fenomeno dei battimenti.....</i>	<i>13</i>
<i>Simulazione del funzionamento di un filtro digitale ALFA.....</i>	<i>14</i>
<i>Radici n-esime di un numero complesso (formula di De Moivre).....</i>	<i>15</i>
<i>Misura di Fase all'oscilloscopio.....</i>	<i>16</i>
<i>Simulazione del funzionamento di un partitore compensato.....</i>	<i>17</i>
<i>Bibliografia essenziale:.....</i>	<i>18</i>

Esperienze di Simulazione in ambiente Mathcad

prof. Cleto Azzani
 IPSIA Moretto Brescia

2005

Introduzione

Mathcad 4.0 per Windows è un pacchetto software che permette la implementazione di modelli matematici e il loro test con tutti i vantaggi offerti dalla semplicità d'uso dell'interfaccia grafica di Windows.

I requisiti hardware e software per il suo corretto funzionamento sono i seguenti:

- piattaforma 386 o 486 (il coprocessore matematico non è indispensabile ma la sua presenza velocizza il funzionamento)
- 4MB Ram minimo (memoria al di sopra dei 640K va configurata estesa)
- Hard Disk con almeno 10MB liberi per i files di Mathcad
- 8MB di memoria virtuale (vedi modalità di settaggio in Windows)
- Monitor, scheda grafica compatibile con la configurazione Windows
- Mouse supportato da Windows
- Stampante supportata da Windows
- MS-DOS o PC-DOS vers. 3.3 o successive
- Microsoft Windows vers. 3.1 o successive

Nelle pagine che seguono verranno proposti una serie di modelli matematici riferiti ad alcuni argomenti scelti fra quelli solitamente trattati nel corso delle lezioni di Elettronica, Laboratorio Misurazioni e Telecomunicazioni allo scopo di verificare graficamente l'esattezza delle considerazioni effettuate nel corso dello studio teorico.

Le premesse iniziali saranno ovviamente di tipo matematico. I prerequisiti sono appunto oltre ad una adeguata conoscenza teorica delle problematiche proposte anche una conoscenza di base dell'ambiente Windows e dell'ambiente di simulazione Mathcad.

Discretizzazione di una funzione continua

L'elaborazione elettronica dei segnali viene effettuata attraverso sistemi numerici di calcolo e quindi richiede che si passi da una funzione continua del tempo ad una funzione discreta di variabile discreta. Questo processo prende il nome di campionamento. Viene definito periodo di campionamento T_c l'intervallo di tempo che intercorre fra due campioni consecutivi. Solitamente tale periodo risulta costante durante l'intero processo di discretizzazione. A titolo di esempio si consideri la funzione seguente rappresentata in fig. 1 :

$$y(t) = \left| \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right| \quad 1.1$$

assumendo ad esempio:

$$t = i \cdot T_c = i \cdot \frac{T}{32} \quad 1.2$$

significherà individuare in un periodo completo T , 32 campioni. La funzione campionata assume la forma indicata dall'espressione:

$$y_i = y(i \cdot T_c) = \left| \cos\left(\frac{2\pi}{32}i\right) \right| \quad 1.3$$

In fig. 2 è rappresentata la funzione $y(t)$ di fig. 1 campionata come sopra indicato.

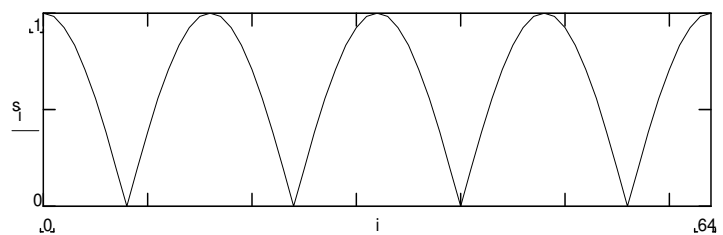


fig. 1 Rappresentazione di una funzione $y(t)$ continua

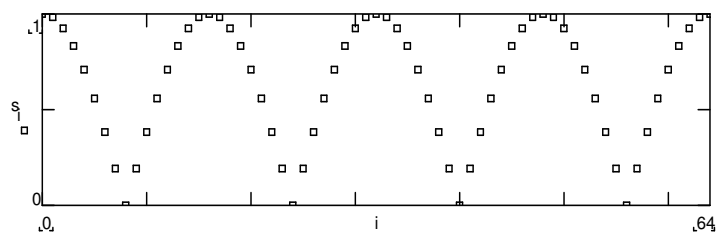


fig. 2 Rappresentazione della funzione $y(t)$ campionata 32 samples al periodo

Teorema del campionamento o di Shannon

Un segnale $y(t)$ viene campionato ad intervalli regolari di tempo T da un campionatore ideale; viene generato perciò un nuovo segnale

$$y_k = y(kT_C) \quad -\infty < k < +\infty \quad 1.4$$

$Y(k)$ rappresenta la versione "discreta" di $y(t)$ ed è definita solo per valori della variabile k interi (valori che identificano l'istante di campionamento).

Shannon ha dimostrato che è possibile affidare a $Y(k)$ tutta l'informazione contenuta in $y(t)$ in altri termini è possibile realizzare un sistema capace di ricostruire il segnale continuo $y(t)$ a partire dai campioni $Y(k)$ purché siano verificate le due condizioni :

- a) $y(t)$ sia un segnale a Banda B rigorosamente limitata
- b) la frequenza di campionamento f_c sia maggiore o uguale a $2B$ (B corrisponde alla banda del segnale continuo di partenza) $2B$ prende il nome di limite di Nyquist.

Osservazioni:

- a) Il Teorema di Shannon assicura l'esistenza di un metodo capace di ricostruire il segnale continuo $y(t)$ nella ipotesi di disporre di un infinito numero di campioni provenienti da una funzione che soddisfi la condizione b). Nei processi di simulazione che ci apprestiamo a proporre, verranno utilizzati, per ovvie ragioni, un numero finito di campioni e, nel caso di segnali periodici, ci limiteremo a rappresentare sui grafici un numero limitato (da 2 a 5) di periodi completi dei segnali in gioco. Ne deriva quindi la necessità di andare ben oltre al limite di Nyquist che prevede un minimo di 2 samples al periodo.*
- b) Si osservi inoltre che l'uso di qualsiasi strumento di simulazione computerizzato, dà una rappresentazione grafica di segnali di natura continua usando una rappresentazione interna che per sua natura opera su dati digitali e perciò discreti.*

Verranno presi in esame in modo completo due esempi di simulazione il primo relativamente semplice si riferisce al tracciamento delle figure di Lissajous, il secondo più complesso ed articolato che tratta della Modulazione e Demodulazione di Ampiezza. Dei successivi esempi verrà fornita semplicemente la scheda prodotta in ambiente Mathcad.

Le figure di Lissajous

Le figure di Lissajous sono figure che appaiono sullo schermo di un oscilloscopio e nascono dalla composizione di due moti armonici ortogonali a pulsazione diversa. Il metodo di Lissajous viene usato per effettuare la misura di frequenza di una sorgente alternata sinusoidale attraverso confronto con un generatore campione; tale metodo è applicato quando le frequenze da confrontare stanno fra di loro in rapporto razionale.

Scopo della presente scheda è appunto la verifica teorica al calcolatore dei risultati che si ottengono in laboratorio nel corso dello svolgimento della esperienza.

Definiamo innanzitutto la risoluzione del campionamento (il numero di suddivisioni del periodo T) ad esempio cento. Scriviamo in alto al foglio:

$$N := 100 \quad 1.5$$

definiamo inoltre due coefficienti interi n_1 ed n_2 il cui rapporto razionale determina il tipo di figura che apparirà sullo schermo:

$$n_1 := 2 \quad n_2 := 3 \quad 1.6$$

Scriviamo l'espressione analitica delle due sinusoidi campionate la prima di pulsazione $n_1\omega$, la seconda di pulsazione $n_2\omega$.

$$j := 0..N \quad x_j := \sin\left(\frac{2\pi \cdot n_1}{N} j\right) \quad y_j := \sin\left(\frac{2\pi \cdot n_2}{N} j\right) \quad 1.7$$

si genera quindi il grafico che riporta in ascisse il vettore $X(j)$ ed in ordinate il vettore $Y(j)$. Il risultato è riportato in fig. 3. Come si noterà dalle espressioni 1.7 i campioni (sample) generati non sono 100 ma 101. Ciò è dovuto al fatto che se un intervallo di tempo T si divide in N parti da tale suddivisione nascono $N+1$ punti. Il risultato della simulazione è riportato in fig. 3.

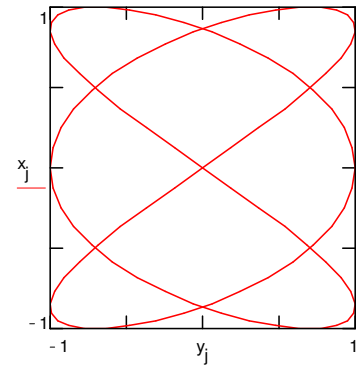


fig. 3 Simulazione delle figure di Lissajous

Modulazione e Demodulazione di Ampiezza

Scopo della presente scheda è l'analisi nel dominio di t e di f di un segnale modulato AM. E' inoltre interessante verificare che il processo di demodulazione riporta al segnale originario.

Nel caso specifico della Modulazione di ampiezza AM devono essere definite le espressioni campionate della portante p(t), della modulante m(t) attraverso le relazioni:

$$i := 0..255 \quad p_i := \sin \frac{2\pi \cdot i}{N_1} \quad m_i := \sin \frac{2\pi \cdot i}{N_2} \quad 1.8$$

deve inoltre essere :

$$f_p \gg f_m \text{ e quindi } N_2 \gg N_1 \quad 1.9$$

la espressione analitica del segnale modulato (con indice di modulazione pari a 0.4) diviene quindi la seguente:

$$x_i := p_i \cdot (1 + 0,4 \cdot m_i) \quad 1.10$$

In figura 4 sono riportati i grafici della portante e della modulante usando i seguenti valori per i parametri $N_2=110$; $N_1=8$. In fig. 5 sono riportati i grafici della modulante e della modulata (con indice di modulazione pari al 40%).

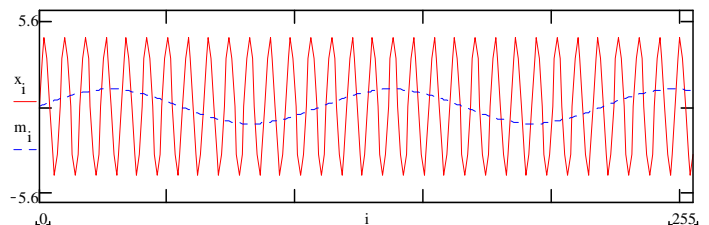


fig. 4 Rappresentazione della portante e della modulante

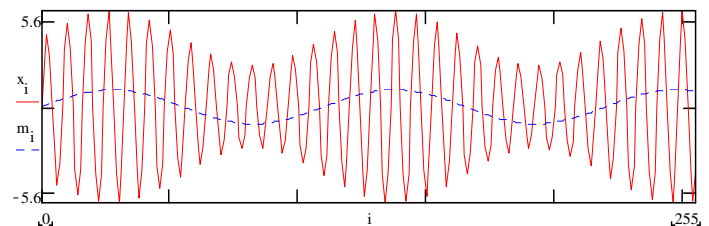


fig. 5 Rappresentazione della portante e della modulata

Nel dominio della frequenza lo spettro del segnale modulato $X(i)$ è ricavabile attraverso la FFT (Trasformata di Fourier Fast Fourier Transform) applicata al vettore $X(i)$.

$$f := FFT(x) \quad j := 0..128 \quad 1.11$$

Dall'analisi della FFT (vedi fig. 6) appare evidente la presenza della portante (centro del diagramma) e delle due bande laterali: quella superiore USB (a frequenza maggiore della portante) e quella inferiore LSB (a frequenza inferiore della portante).

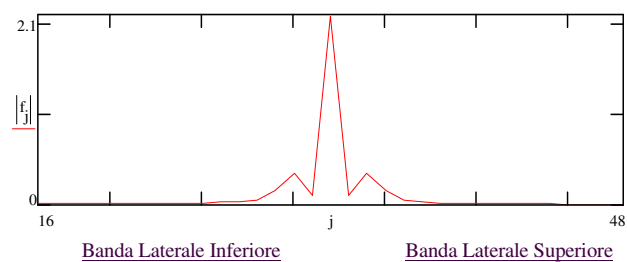


fig. 6 Spettro del Segnale Modulato AM

Se procediamo ad effettuare una demodulazione sincrona con demodulatore a prodotto (simulato dalla seguente espressione nel dominio di t):

$$y_i := x_i \cdot p_i \quad 1.12$$

è possibile analizzare lo spettro in uscita h al demodulatore (fig. 7) usando la FFT. Introducendo ora un filtro Passa Basso ideale e (funzione di Heaviside nel dominio di f) antitrasformando si ritorna al segnale di partenza.

$$h_j := h_j \cdot \mathcal{O}(20 - j) \quad 1.13$$

$$z := IFFT(h) \quad 1.14$$

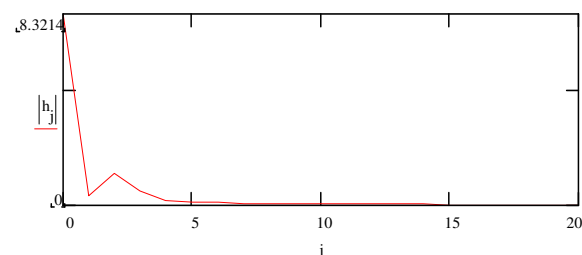


fig. 7 Spettro in uscita al demodulatore a prodotto

In fig. 8 è riportato l'andamento nel tempo del segnale demodolato dal processo di simulazione e in fig 9 è riportato l'andamento nel tempo del segnale modulante originale. Si osservi la quasi perfetta coincidenza della forma d'onda.

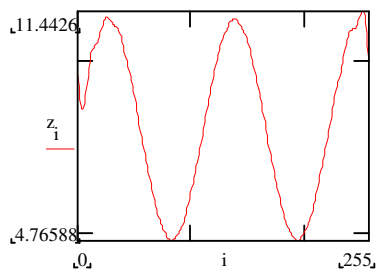


fig. 8 Segnale Demodolato

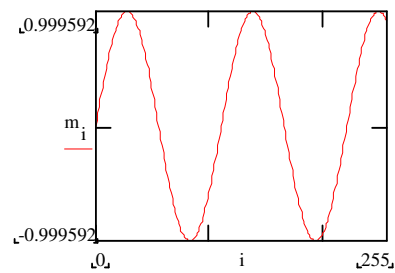


fig. 9 Segnale Originale

E' possibile condurre una analoga esperienza di simulazione utilizzando anzichè un demodulatore a prodotto un demodulatore ad involuppo (demodulatore a diodo) tramite la funzione matematica valore assoluto che va sostituita nella espressione 1.12 come segue:

$$y_i := |x_i| \quad 1.15$$

Dopo avere compiutamente esaminato le modalità di conduzione della simulazione nel caso del tracciamento delle figure di Lissajous e nel caso della Modulazione e Demodulazione di Ampiezza ora verranno presentate, senza ulteriore commento otto altre schede di simulazione relative ai seguenti argomenti:

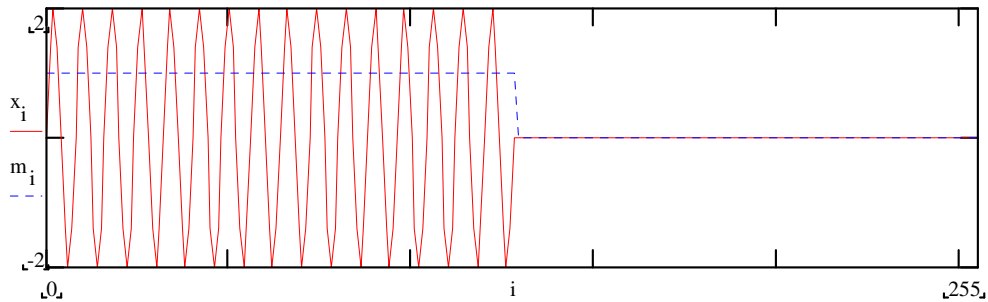
- *Modulazione e Demodulazione CW*
- *Modulazione e Demodulazione FM*
- *Modulazione e Demodulazione PSK*
- *Simulazione del fenomeno dei battimenti*
- *Simulazione del funzionamento di un filtro digitale ALFA*
- *Radici n-esime di un numero complesso (formula di De Moivre)*
- *Misura di Fase all'oscilloscopio*
- *Simulazione del funzionamento di un partitore compensato*

Modulazione e Demodulazione CW

Definiamo la portante p : $i := 0..255$ $p_i := 2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{i}{8}\right)$

e il segnale modulante m : $m_i := \Phi(128 - i)$

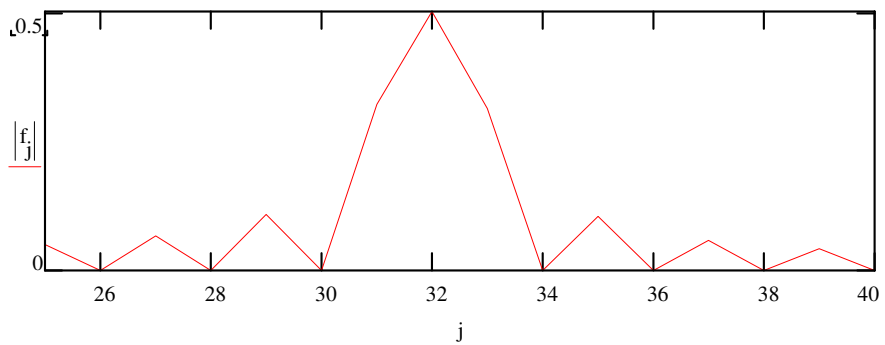
il segnale modulato x : $x_i := (p_i \cdot m_i)$ *Segnale Modulato CW*



Ricaviamoci la DFT trasformata di Fourier Discreta :

$f := \text{FFT}(x)$ $j := 0..128$

Spettro CW



Banda Laterale Inferiore

Banda Laterale Superiore

Demoduliamo in modo sincrono riutilizzando la portante :

$$y_i := x_i \cdot p_i$$

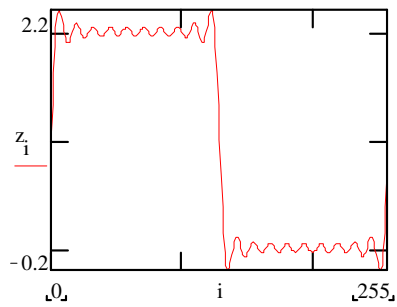
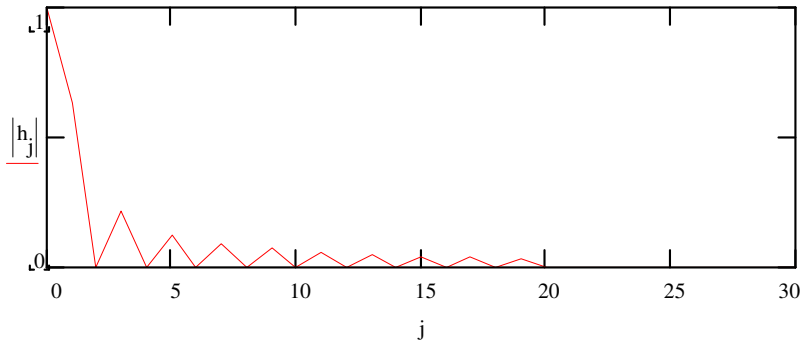
Determiniamo lo spettro del segnale in uscita al demodulatore :

Inseriamo filtro passa basso ideale:

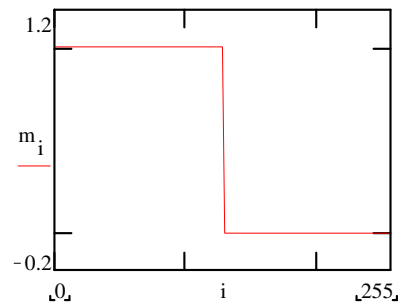
$$h_j := h_j \cdot \Phi(20 - j)$$

Passiamo ora al dominio del tempo :

$$z := \text{IFFT}(h)$$



SEGNALE DEMODULATO



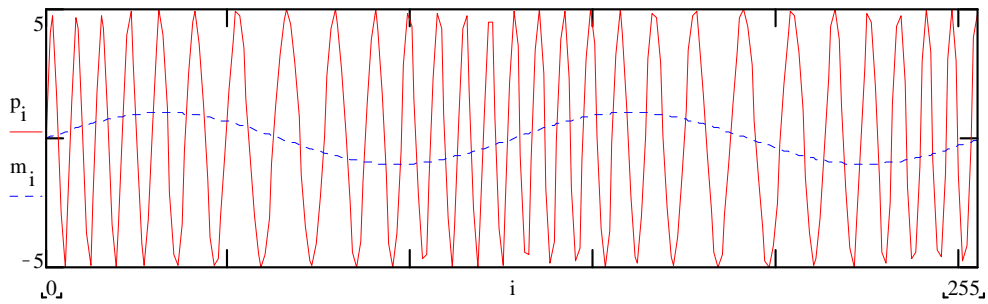
MODULANTE ORIGINALE

Modulazione e Demodulazione FM

Definiamo la modulante : $i := 0..255$ $m_i := \sin\left(2\pi \cdot \frac{i}{128}\right)$

Il segnale modulato FM: $p_i := 5 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{i}{9} + m_i \cdot 5\right)$

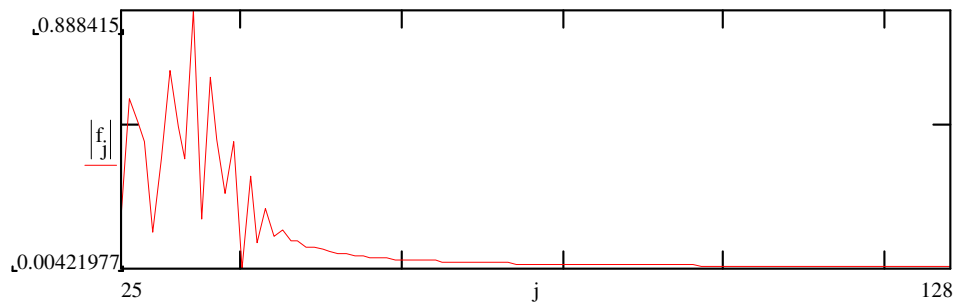
Segnale Modulato FM nel tempo



$f := \text{FFT}(p)$ $j := 0..128$

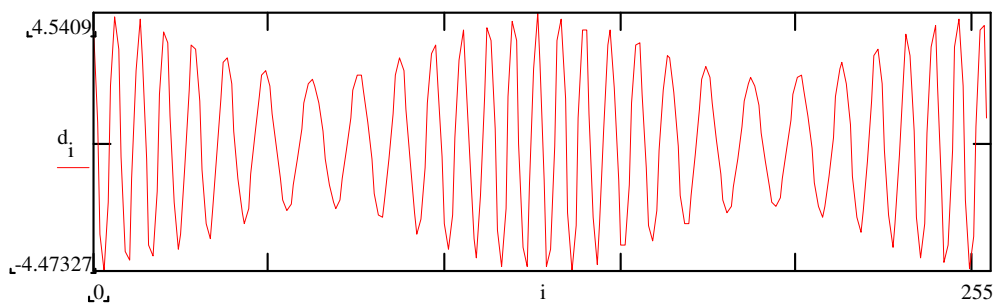
Ricaviamoci la DFT trasformata di Fourier Discreta :

Spettro segnale FM

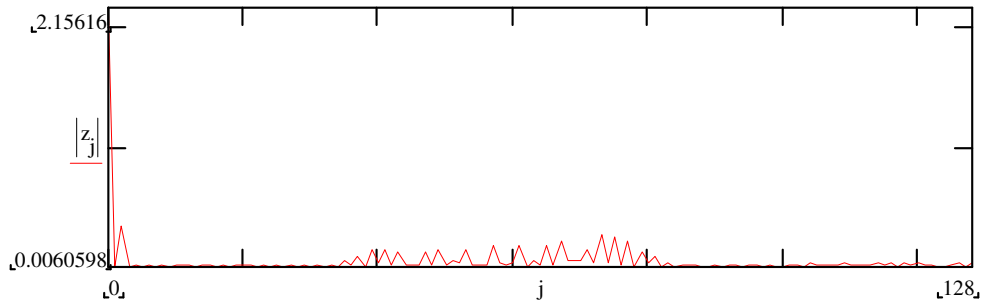


Deriviamo numericamente il segnale FM nel tempo :

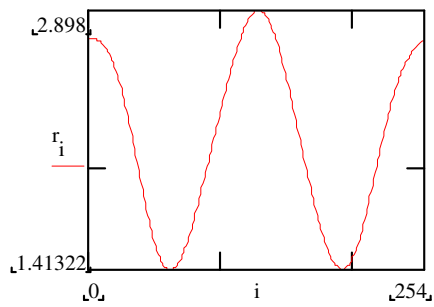
$i := 0..254$ $d_i := p_{i+1} - p_i$ $d_{255} := 0$



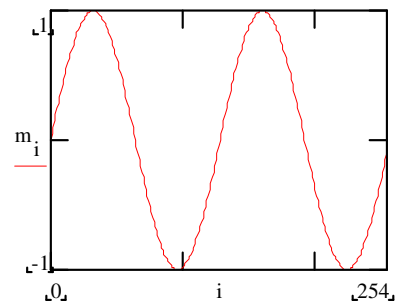
$$d_i := |d_i| \quad \text{rettificatore} \quad z := \text{FFT}(d)$$



$$z_j := z_j \cdot \Phi(5 - j) \quad \text{filtro passa basso} \quad r := \text{IFFT}(z)$$



SEGNALE OTTENUTO DA DEMODULAZIONE



SEGNALE ORIGINALE

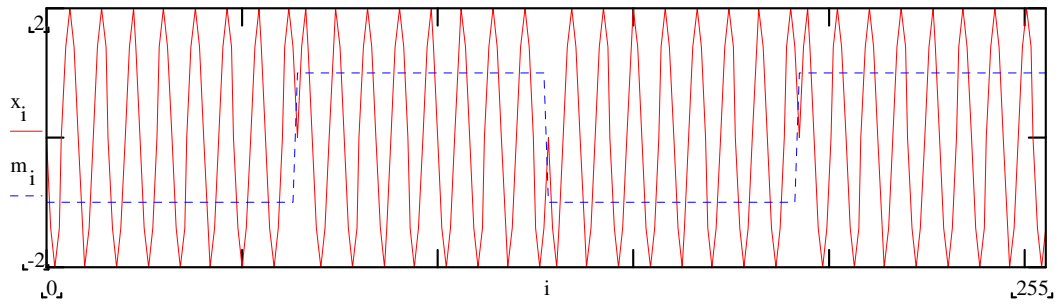
Lo sfasamento di 90 gradi è dovuto alla operazione di derivazione numerica che com è noto nel dominio di f modifica la fase.

Modulazione e Demodulazione PSK

Definiamo la portante p : $i := 0..255$ $p_i := 2 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{8}\right)$

e il segnale modulante m : $k := 0..63$ $m_k := -1$ $k := 64..127$ $m_k := 1$
 $k := 128..191$ $m_k := -1$ $k := 192..255$ $m_k := 1$

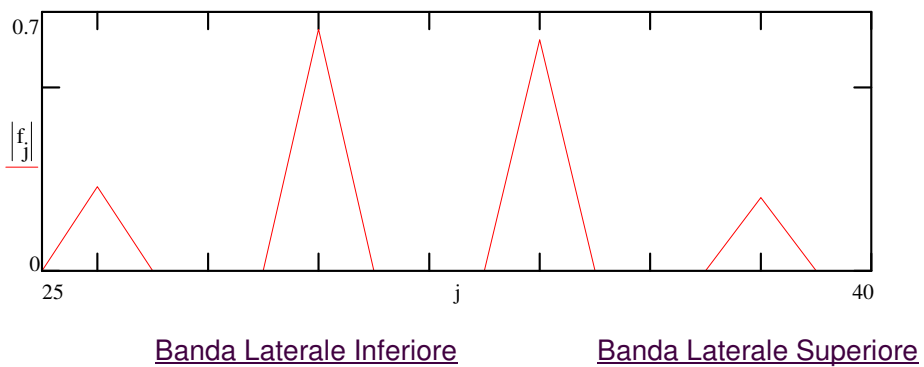
il segnale modulato x : $x_i := (p_i \cdot m_i)$



Ricaviamoci la DFT trasformata di Fourier Discreta :

$f := \text{FFT}(x)$ $j := 0..128$

Spettro del segnale PSK

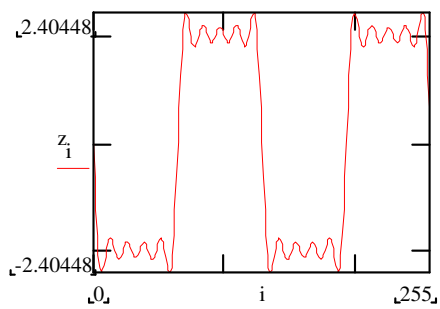
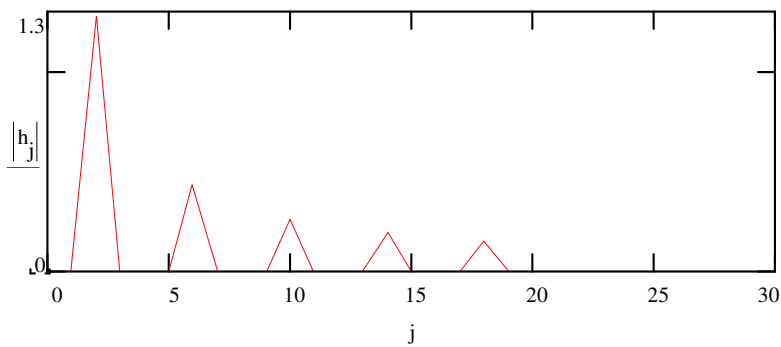


Demoduliamo in modo sincrono riutilizzando la portante : $y_i := x_i \cdot p_i$

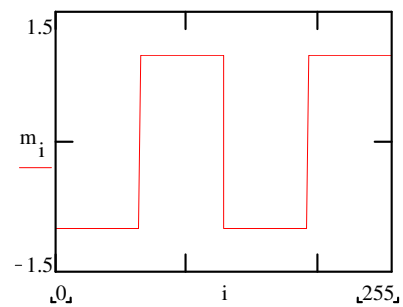
Determiniamo lo spettro del segnale in uscita al demodulatore : $h := \text{FFT}(y)$

Inseriamo filtro passa basso ideale: $h_j := h_j \cdot \Phi(20 - j)$

Passiamo ora al dominio del tempo : $z := \text{IFFT}(h)$



SEGNALE DEMODULATO



MODULANTE ORIGINALE

Simulazione del fenomeno dei battimenti

Parametri →

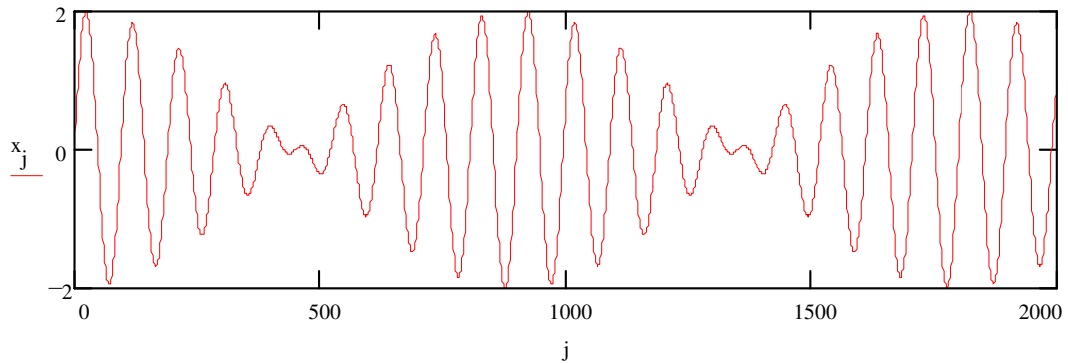
Frequenze :

$n1 := 100$

$j := 1..2000$

$n2 := 90$

$$x_j := \sin\left(2\pi \cdot \frac{j}{n1}\right) + \sin\left(2\pi \cdot \frac{j}{n2}\right)$$



Il fenomeno dei battimenti si verifica quando due segnali di tipo sinusoidale a frequenza approssimativamente uguale si sommano. Ne nasce come si evidenzia dal grafico una modulazione di ampiezza di tipo cosinusoidale caratterizzata da un periodo tanto piú elevato quanto piú le due frequenze sono una prossima all'altra. Il grafico temporale (vedi figura) presenta dei punti di massimo (quando i due vettori sono in fase) detti ventri della forma d'onda e dei punti di minimo (quando i due vettori sono in opposizione di fase) detti nodi della forma d'onda.

In fase di simulazione vengono generati 2000 valori poi riportati nel grafico. Tanto piú il parametro $n2$ é prossimo ad $n1$ tanto piú le due frequenze sono uguali.

Simulazione del funzionamento di un filtro digitale ALFA

Definiamo il segnale di ingresso p:

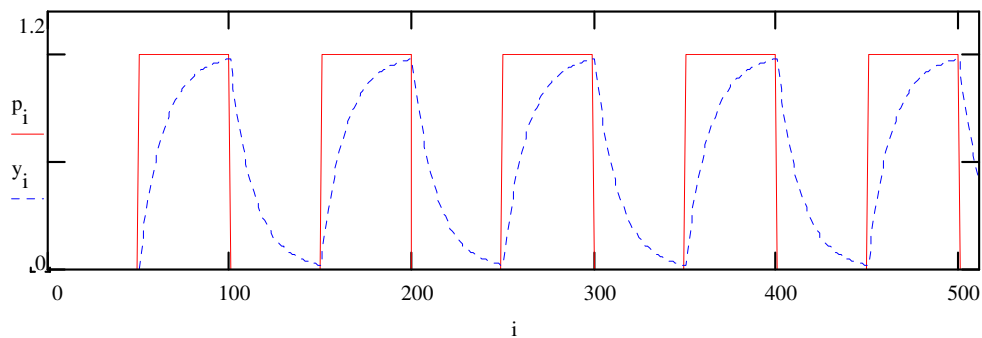
$$i := 0..511 \quad p_i := 0 \quad k := 50..99 \quad p_k := 1 \quad k := 150..199 \quad p_k := 1 \quad k := 250..299 \quad p_k := 1 \\ k := 350..399 \quad p_k := 1 \quad k := 450..499 \quad p_k := 1$$

Determinazione del parametro alfa in relazione al tipo di transitorio desiderato

$$m := \frac{50}{4} \quad \alpha := \frac{1}{m+1} \quad \alpha = 0.074$$

Filtraggio Alfa Passa Basso

$$k := 0..511 \quad y_0 := 0 \quad y_{k+1} := \alpha \cdot p_k + (1 - \alpha) \cdot y_k$$



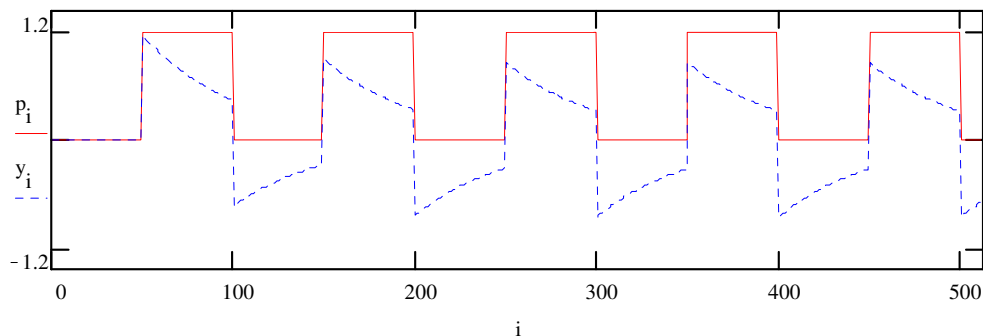
$$y_{100} = 0.979 \quad \alpha = 0.074 \quad m = 12.5$$

Determinazione del parametro alfa in relazione al tipo di transitorio desiderato

$$m := \frac{50}{1} \quad \alpha := \frac{1}{m+1} \quad \alpha = 0.02$$

Filtraggio Alfa Passa Alto

$$k := 0..510 \quad y_0 := 0 \quad y_{k+1} := (1 - \alpha) \cdot (p_{k+1} - p_k + y_k) \quad y_{512} := y_{511}$$



$$y_{100} = -0.616 \quad \alpha = 0.02 \quad m = 50$$

Radici n-esime di un numero complesso (formula di De Moivre)

Definiamo il seguente numero complesso :

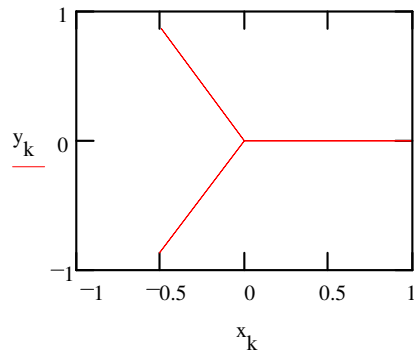
Modulo di z : $\rho := 1$

Fase di z : $\phi := \frac{0}{180} \cdot \pi$ $\phi = 0$ Indice della radice : $n := 3$

$k := 0..2 \cdot n$ $x_k := 0$ $y_k := 0$

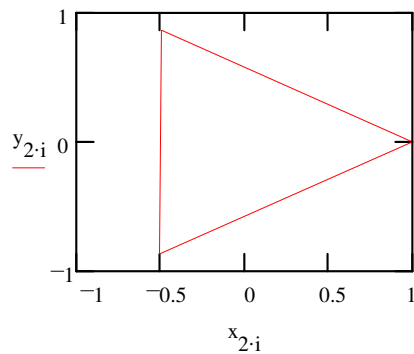
$i := 0..n$

$x_{2:i} := \cos\left(\frac{\phi}{n} + 2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{n}\right)$ $y_{2:i} := \sin\left(\frac{\phi}{n} + 2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{n}\right)$



Rappresentazione delle radici nel piano di GAUSS

$i := 0..n$



Poligono regolare generato dalle radici

Misura di Fase all'oscilloscopio

Parametri →

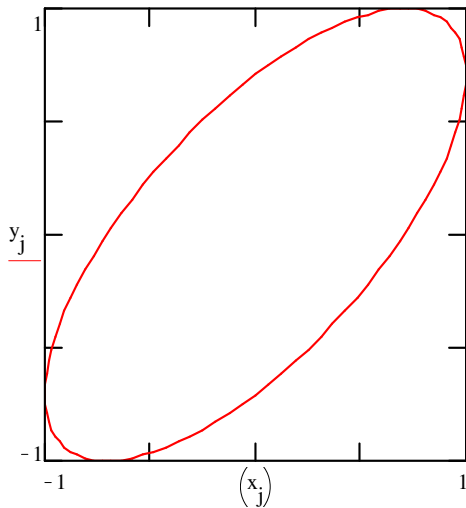
Risoluzione: $N := 100$

$\alpha := 45$

$j := 1..N+1$

$$x_j := \sin\left(2\pi \cdot \frac{j}{N}\right)$$

$$y_j := \sin\left(2\pi \cdot \frac{j}{N} + \frac{\alpha}{180} \cdot \pi\right)$$



Per vedere diverse ellissi é sufficiente modificare il valore dell'angolo alfa che esprime lo sfasamento esistente fra le due sinusoidi: quella applicata all'asse x e quella applicata all'asse y.

Simulazione del funzionamento di un partitore compensato

Definiamo il segnale p

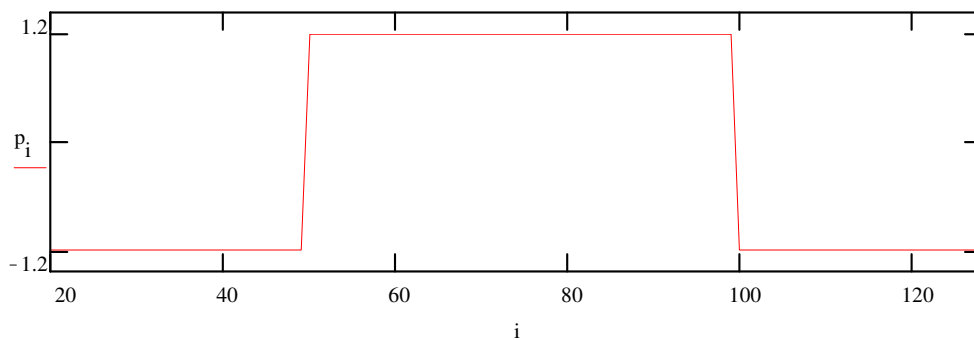
$i := 0..511$ $p_i := -1$ $k := 50..99$ $p_k := 1$ $k := 150..199$ $p_k := 1$ $k := 250..299$ $p_k := 1$
 $k := 350..399$ $p_k := 1$ $k := 450..499$ $p_k := 1$

Determinazione del parametro alfa in relazione al tipo di transitorio desiderato

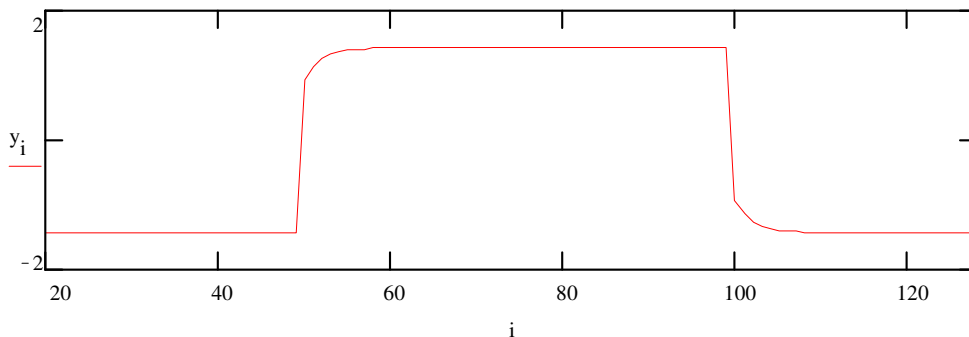
$m1 := 1$ $m2 := 0.7$

Filtraggio Alfa Passa Basso

$$k := 0..510 \quad y_0 := 0 \quad y_{k+1} := \frac{1}{1+m2} \cdot (y_k + p_{k+1}) + \frac{m1}{1+m2} \cdot (p_{k+1} - p_k)$$



Forma d'onda di ingresso al partitore



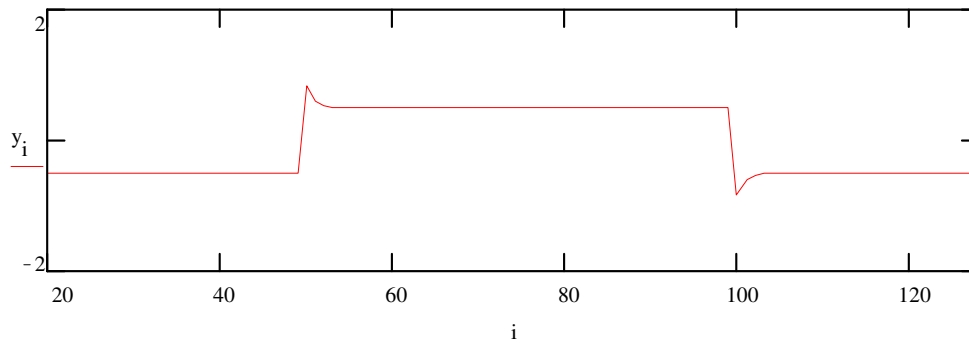
Forma d'onda di uscita al partitore nel caso di INSUFFICIENTE compensazione

Determinazione del parametro alfa in relazione al tipo di transitorio desiderato

$m1 := 1$ $m2 := 2$

Filtraggio Alfa Alto

$$k := 0..510 \quad y_0 := 0 \quad y_{k+1} := \frac{1}{1+m2} \cdot (y_k + p_{k+1}) + \frac{m1}{1+m2} \cdot (p_{k+1} - p_k)$$



Forma d'onda di uscita al partitore nel caso di ECCESSIVA compensazione

Bibliografia essenziale:

Mathcad 4.0 User's Guide Windows Version Mathsoft Inc. USA Massachusetts
