SOMMARIO

Esercizi Svolti sullo Sviluppo in Serie di Fourier

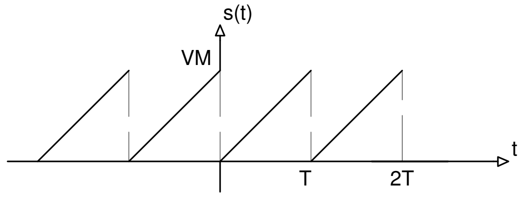
prof. Cleto Azzani
IPSIA Moretto Brescia

Novembre 1995

Esercizi svolti sullo sviluppo in serie di Fourier

Esercizio n. 1

Data la forma d'onda riportata nell'esempio n. 1 si ricavino le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrico (seconda forma).



Segnale a dente di sega

Il segnale a dente di sega (o rampa) di figura di periodo T, frequenza f e valore massimo V_M è caratterizzato dai seguenti coefficienti :

$$A_0 = \frac{V_M}{2}; \qquad A_1 = A_2 = ... = A_K = ... = 0 \qquad \text{E1.1}$$

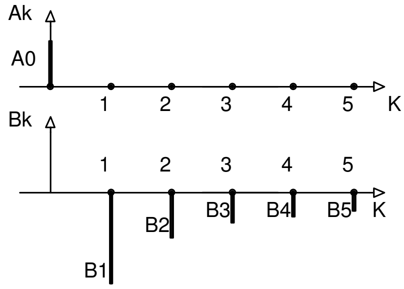
$$B_1 = -\frac{V_M}{\pi}; \quad B_2 = -\frac{V_M}{2\pi}; \quad B_K = -\frac{V_M}{k\pi}; \quad \text{E1.2}$$

tenendo conto delle relazioni 2.68, 2.69, E1.1 e E1.2 si ha:

$$C_0 = \frac{V_M}{2} \qquad \text{E1.3}$$

$$C_K = \sqrt{A_K^2 + B_K^2} = |B_K| = \frac{V_M}{k\pi} \qquad \text{E1.4}$$

$$\varphi_K = \pi$$



Spettro segnale a dente di sega

Esercizio n. 2

Data la forma d'onda riportata nell'esempio n. 2 si ricavino le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrico (seconda forma).

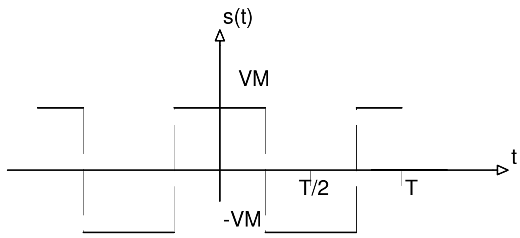


fig. 4 Esempio di onda quadra pari

Onda quadra pari di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo V_M e negativo $-V_M$ è caratterizzata dai seguenti coefficienti :

$$A_0 = 0; \quad A_1 = \frac{4V_M}{\pi}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = -\frac{4V_M}{3\pi}; \quad A_4 = 0; \quad \text{E1.5}$$

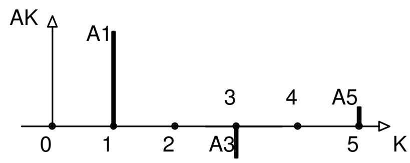
$$B_1 = B_2 = B_3 = ... = B_K = ... = 0 \qquad \text{E1.6}$$

$$C_K = \sqrt{A_K^2 + B_K^2} = |A_K| = \frac{4V_M}{k\pi} \quad k = 1,3,5,...(dispari) \quad \text{E1.7}$$

$$\varphi_K = +\frac{\pi}{2} \qquad k = 1,5,9,...$$

$$\text{E1.8}$$

$$\varphi_K = -\frac{\pi}{2} \qquad k = 3,7,11,...$$



Spettro onda quadra pari

Esercizio n. 3
Scrivere il teorema di Parseval per le forma d'onda riportate negli esempio n. 1

Dalla relazione 2.83 si ha (tenendo conto delle E1.1):

$$S^2 = A_0^{\ 2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\ 2} + B_K^{\ 2}}{2} = A_0^{\ 2} + \sum_1^{\infty} \frac{B_K^{\ 2}}{2} \qquad \text{E1.9}$$

tenendo conto della 2.3 si ha :

$$S_{RMS}^2 = \frac{V_M^2}{3} = \frac{V_M^2}{4} + \sum_1^{\infty} \frac{V_M^2}{k^2\pi^2} \qquad \text{E1.10}$$

Esercizio n. 4
Scrivere il teorema di Parseval per le forma d'onda riportate negli esempio n. 2

Dalla relazione 2.83 si ha (tenendo conto delle E1.5 E1.6):

$$S^2 = A_0^{\ 2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\ 2} + B_K^{\ 2}}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2} \qquad \text{E1.9}$$

tenendo conto della 2.19 si ha :

$$S_{RMS}^2 = V_M^2 = \sum_1^{\infty} \frac{16 \cdot V_M^2}{k^2\pi^2} \qquad k = 1,3,5,...(\,dispari\,) \qquad \text{E1.10}$$

Esercizio n. 5
Un generatore di onde quadre (esempio 2) con VM=10V, f=5KHz è posto all'ingresso di un filtro Passa Basso ideale con fT= 20KHz. Disegnare lo spettro del segnale in uscita al filtro e calcolarne il valore efficace. Calcolare il valore efficace della componente eliminata dal filtro.

In uscita al filtro Passa Basso citato saranno presenti unicamente le componenti armoniche di indice armonico inferiore a 4 (nel caso di onda quadra avremo prima e terza armonica). Applicando pertanto il teorema di Parseval si ottiene :

$$V_{RMS}^2 = \sum_1^{3} \frac{A_K^{\ 2}}{2} = \frac{A_1^{\ 2}}{2} + \frac{A_3^{\ 2}}{2} = \frac{16 \cdot V_M^2}{2\pi^2}\left(\frac{10}{9}\right)$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{16 \cdot V_M^2}{2\pi^2}\left(\frac{10}{9}\right)} = \frac{4V_M}{3\pi}\sqrt{5}$$

Il valore efficace della componente eliminata dal filtro (dalla quinta armonica in poi) si ottiene anch'essa applicando Parseval.

$$S^2 = \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2} = \sum_1^{3} \frac{A_K^{\ 2}}{2} + \sum_4^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2} = V_{RMS}^2 + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2}$$

$$\sum_4^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2} = S^2 - V_{RMS}^2 = \frac{80 \cdot V_M^2}{9\pi^2} - V_M^2 = \frac{80 - 9\pi^2}{9\pi^2} V_M^2$$

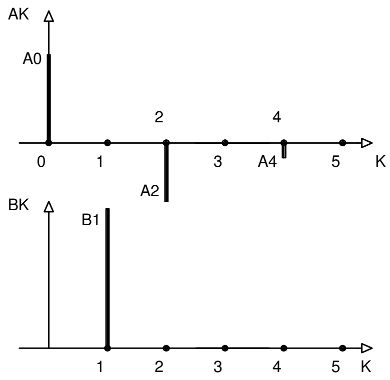
$$\sqrt{\sum_4^{\infty} \frac{A_K^{\ 2}}{2}} = \sqrt{S^2 - V_{RMS}^2} = \sqrt{\frac{80 - 9\pi^2}{9\pi^2} V_M^2} = V_M \frac{\sqrt{80 - 9\pi^2}}{3\pi}$$

Esercizio n. 6
Un raddrizzatore ad una semionda alimenta un carico resistivo con una forma d'onda che ha le seguenti caratteristiche: VM=100V, f=50Hz (esempio 5). Calcolare il valore efficace della componente alternata .

Onda pulsante sinusoidale (uscita raddrizzatore ad una semionda) di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo V_M (fig. 8) è caratterizzata dai seguenti coefficienti :

$$A_0 = \frac{V_M}{\pi}; \quad A_1 = 0; \; A_2 = -\frac{2V_M}{3\pi}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = -\frac{2V_M}{15\pi};$$

$$B_1 = \frac{V_M}{2}; B_2 = B_3 = ... = B_K = ... = 0$$



Spettro onda pulsante sinusoidale

il suo valore efficace inoltre è espresso dalla relazione :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{2}$$

Dalla relazione 2.83 si ha (tenendo conto delle ....):

$$S^2 = A_0^{\,2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\,2} + B_K^{\,2}}{2} = A_0^{\,2} + \frac{B_1^2}{2} + \sum_2^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2}$$

$$\frac{V_M^2}{4} = \frac{V_M^2}{\pi^2} + \frac{V_M^2}{8} + \sum_2^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2}$$

la componente alternata presente nel segnale è rappresentata da tutte le componenti armoniche eccettuata la componente continua pertanto per l'eguaglianza di Parseval si avrà:

$$\frac{V_M^2}{8} + \sum_2^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2} = \frac{V_M^2}{4} - \frac{V_M^2}{\pi^2}$$

$$\sqrt{\frac{V_M^2}{8} + \sum_2^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2}} = \sqrt{\frac{V_M^2}{4} - \frac{V_M^2}{\pi^2}} = \frac{V_M}{2\pi}\sqrt{\pi^2 - 4}$$

Esercizio n. 7

Individuare la componente pari del segnale riportato nell'esempio n. 5 e calcolarne il valore efficace.

Onda pulsante sinusoidale (uscita raddrizzatore ad una semionda) di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo V_M (fig. 8) è caratterizzata dal seguente sviluppo in serie:

$$s(t) = \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} sin\omega t - \frac{2V_M}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t + ...\right]$$

la componente pari è caratterizzata dal seguente sviluppo in serie :

$$s_p(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_K \cdot cosk\omega t$$

Il teorema di Parseval può essere scritto nella forma seguente:

$$S^2 = A_0^{\,2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\,2} + B_K^{\,2}}{2} = A_0^{\,2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{B_K^{\,2}}{2}$$

scomponendo il contributo al valore efficace della parte pari e dispari del segnale s(t) si ha :

$$S_p^2 = A_0^{\,2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\,2}}{2}$$

$$S_d^2 = \sum_1^{\infty} \frac{B_K^{\,2}}{2}$$

$$S^2 = A_0^{\,2} + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^{\,2} + B_K^{\,2}}{2} = S_p^2 + S_d^2$$

$$S_p^2 = S^2 - S_d^2 = \frac{V_M^2}{4} - \frac{V_M^2}{8} = \frac{V_M^2}{8}$$

$$S_{pRMS} = \sqrt{\frac{V_M^2}{8}} = \frac{V_M}{2\sqrt{2}}$$

Esercizio n. 8

Da un'onda triangolare (esempio n. 4) vengono estratte tramite un filtro passa basso le prime tre componenti armoniche. Calcolare il valore efficace del segnale risultante.

Onda triangolare pari di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo V_M e negativo $-V_M$ è caratterizzata dai seguenti coefficienti :

$$A_0 = 0; \quad A_1 = \frac{8V_M}{\pi^2}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = \frac{8V_M}{(3\pi)^2}; \quad A_4 = 0;$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \ldots = B_K = \ldots = 0$$

il suo valore efficace inoltre è esprimibile dalla relazione :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{3}}$$

$$S^2 = A_0^2 + \sum_1^\infty \frac{A_K^2 + B_K^2}{2} = \sum_1^\infty \frac{A_K^2}{2}$$

$$\frac{V_M^2}{3} = \sum_1^\infty \frac{A_K^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} + \sum_5^\infty \frac{A_K^2}{2}$$

$$V_{Crms}^2 = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} = \frac{32V_M^2}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{9}\right)$$

da cui

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{320V_M^2}{9\pi^4}} = \frac{V_M}{3\pi^2} 8\sqrt{5}$$

Il valore efficace della componente eliminata dal filtro è ricavabile dalla espressione:

$$\sum_5^\infty \frac{A_K^2}{2} = \frac{V_M^2}{3} - \frac{A_1^2}{2} - \frac{A_3^2}{2} = \frac{V_M^2}{3} - \frac{320V_M^2}{9\pi^4} = V_M^2\left(\frac{1}{3} - \frac{320}{9\pi^4}\right)$$

E9

Per il segnale presentato nell'esempio n. 7 ricavare gli spettri Ak e Bk nell'ipotesi che si abbia:
VM=10V, f=10KHz, d=20%

E10

Un circuito RL con R=5 Ω e L=20mH connesse in serie è alimentato da un generatore v dato dall'espressione : v = 100 + 50 sinωt + 25 sin3ωt con ω = 500 rad/sec. ricavare l'espressione della corrente circolante; tracciare gli spettri di v e di i; calcolare le potenze P, Q, A, D.

E11
Determinare le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier esponenziale delle forme d'onda degli esempi 1, 2, 3, 4, 5.

Esercizio n. 12

Al segnale dell'esempio 4 viene aggiunta una componente continua pari a VM; scrivere la nuova espressione del suo sviluppo in serie e calcolare la nuova espressione del valore efficace.

Onda triangolare pari di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo V_M e negativo $-V_M$

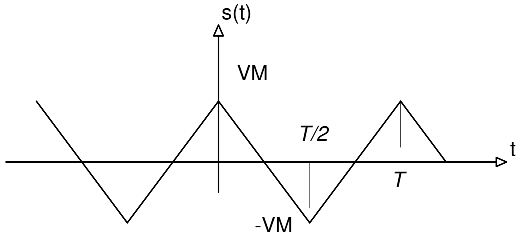
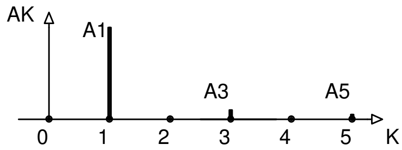


fig. 7 Esempio di onda triangolare pari



Spettro onda triangolare

$$s_1(t) = V_M + s(t) = V_M + \frac{8V_M}{\pi^2}\left[cos\omega t + \frac{1}{3^2}cos3\omega t + \frac{1}{5^2}cos5\omega t + \frac{1}{7^2}cos7\omega t + ...\right]$$

il suo valore efficace inoltre è calcolabile attraverso il teorema di Parseval :

$$S_1^2 = A_0^2 + \sum_1^\infty \frac{A_K^2 + B_K^2}{2} = A_0^2 + S^2 = V_M^2 + \frac{V_M^2}{3} = \frac{4}{3}V_M^2$$

da cui risulta:

$$S_{1rms} = \frac{2}{\sqrt{3}}V_M$$

E13
Un segnale triangolare (esempio n. 4) con VM=10V f=4KHz alimenta un filtro Passa Banda con fti=10KHz e fts=18KHz. Il guadagno del filtro è pari ad 1 nella banda di trasparenza. Calcolare il valore efficace del segnale in uscita al filtro.

E14
Un bipolo non lineare quadratico il cui funzionamento è completamente descritto dalla relazione: $i(t)=k\,v(t)^2$ con k=0,2 è alimentato da una tensione del tipo : $v(t) = 100 \sin\omega t + 10 \sin 2\omega t$ con $\omega=2\pi f$ f=1KHz ricavare lo spettro della corrente i(t).

E15
In un circuito ohmico induttivo se la tensione di alimentazione è data dall'espressione $v=V_M \sin\omega t$ la corrente è espressa dalla formula $i=I_M \sin(\omega t-\varphi)$. Calcolare l'espressione analitica del valore medio del prodotto v*i (valori istantanei). Disegnare un semplice schema a blocchi di un wattmetro elettronico.

$$p(t) = V_M sin\omega t \cdot I_M sin(\omega t - \varphi) = V_M I_M \left(sin^2\omega t \cdot \cos\varphi - \cos\omega t \cdot sin\varphi\right)$$

$$p(t) = \frac{V_M I_M \cos\varphi}{2}(1 - \cos 2\omega t) - V_M I_M sin\varphi \cdot \cos\omega t$$

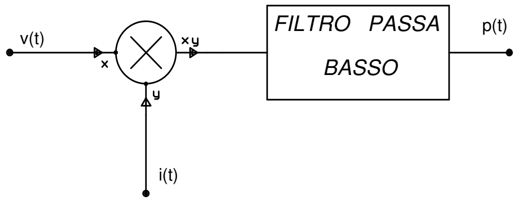
da cui deriva:

$$\left[p(t)\right]_m = \frac{V_M I_M \cos\varphi}{2} = VI\cos\varphi$$

essendo com'è noto:

$$\left[\cos 2\omega t\right]_m = 0$$

$$\left[\cos \omega t\right]_m = 0$$



Schema a blocchi funzionale di un Wattmetro elettronico

E16

In un circuito ohmico induttivo se la tensione di alimentazione è data dall'espressione $v=V_M \sin\omega t$ la corrente è espressa dalla formula $i=I_M \sin(\omega t-\varphi)$. Calcolare l'espressione analitica del valore medio del prodotto v2*i (valori istantanei). La tensione v2 è sfasata in ritardo rispetto a v di 90 gradi.

$$v_2(t) = V_M sin(\omega t - 90) = -V_M \cos\omega t$$

$$v_2(t)\cdot i(t) = -V_M \cos\omega t \cdot I_M sin(\omega t - \varphi) = -V_M I_M \left(sin\omega t \cdot \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \cos^2\omega t \cdot sin\varphi\right)$$

$$v_2(t)\cdot i(t) = \frac{V_M I_M sin\varphi}{2}(1+\cos 2\omega t) - V_M I_M \cos\varphi \cdot \cos\omega t \cdot sin\omega t$$

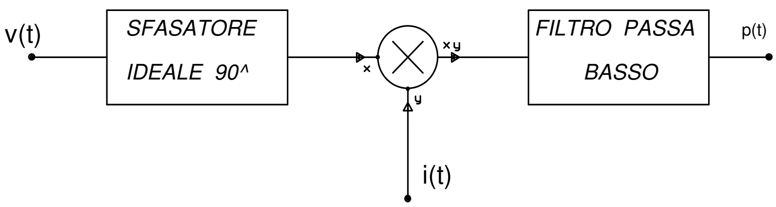
da cui deriva:

$$\left[v_2(t)\cdot i(t)\right]_m = \frac{V_M I_M sin\varphi}{2} = VI\ sin\varphi$$

essendo com'è noto:

$$\left[\cos 2\omega t\right]_m = 0$$

$$\left[\cos \omega t\right]_m = 0$$



Schema a blocchi funzionale di un Varmetro elettronico
