

SOMMARIO

<i>NUMERI COMPLESSI</i>	2
<i>Formula di Eulero</i>	2
<i>Coniugato di un numero complesso</i>	3
<i>Potenza n-esima di un numero complesso z (formula di De Moivre)</i>	3
<i>Radice n-esima di z</i>	3
<i>Osservazioni</i>	5
<i>Logaritmo di un numero complesso z</i>	5
<i>Osservazioni</i>	5
<i>Esempi</i> :.....	6

Radici, potenze, logaritmi in campo complesso.

prof. Cleto Azzani
IPSIA Moretto Brescia
(1993-94-2005)

Numeri Complessi

Nel campo dello studio delle discipline tecniche dell'area elettronica riveste notevole importanza lo studio di funzioni complesse di variabile complessa tra cui la radice in campo complesso, il logaritmo etc.

Sia dato un numero complesso z rappresentato in *forma cartesiana* dalla parte reale a e dalla parte immaginaria b

$$\bar{z} = a + jb \quad 1.1$$

Un numero complesso può essere rappresentato su un particolare piano cartesiano chiamato piano di Gauss che riporta sulle ascisse le quantità reali \Re_e e sulle ordinate le quantità immaginarie \Im_m . Un numero complesso z viene rappresentato nel piano di Gauss con un vettore applicato nell'origine.

E' molto facile dimostrare che nella somma o sottrazione fra due numeri complessi si sommano o si sottraggono le parti reali e le parti immaginarie.

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 + j \cdot b_1) + (a_2 + j \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (a_1 + j \cdot b_1) - (a_2 + j \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

tale numero complesso può essere rappresentato anche in *forma polare* attraverso la definizione del modulo ρ e fase φ così ricavabili :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad 1.2$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{se } a > 0 \quad 1.3$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{se } a < 0 \quad 1.4$$

Nel caso particolare in cui il modulo di un numero complesso valga 0 la fase risulta indeterminata.

Una terza forma è la *rappresentazione esponenziale* che è perfettamente equivalente alla rappresentazione polare.

Formula di Eulero

Tenendo presente la relazione di Eulero il numero complesso z può essere scritto nella seguente forma:

$$\bar{z} = \rho \cdot e^{j\varphi} = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad 1.5$$

E' molto facile dimostrare che nel prodotto fra due numeri complessi si moltiplicano fra loro i moduli e si sommano le fasi mentre nel rapporto fra due numeri complessi si dividono fra loro i moduli e si sottraggono le fasi.

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \rho_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{\rho_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Coniugato di un numero complesso

Dato un numero complesso z:

$$z = a + j \cdot b$$

si definisce coniugato di z e si indica con z asterisco un numero complesso con la medesima parte reale a e con la parte immaginaria b cambiata di segno:

$$z^* = a - j \cdot b$$

Il coniugato di z rappresenta l'immagine speculare di z rispetto all'asse reale.

E' molto facile dimostrare che $z \cdot z^* = \rho^2$ quanto segue:

$$z \cdot z^* = \rho \cdot e^{j\varphi} \cdot \rho \cdot e^{-j\varphi} = \rho^2$$

Potenza n-esima di un numero complesso z (formula di De Moivre)

Sia dato un numero complesso z definito da una parte reale a e da una parte immaginaria b:

$$\bar{z} = a + jb = \rho \cdot e^{j\varphi} \quad 1.6$$

tale numero complesso è caratterizzato da modulo ρ e fase φ ricavabili come indicato in precedenza. Volendo elevare alla potenza n il numero complesso z si avrà:

$$[\bar{z}]^n = \rho^n \cdot e^{jn\varphi} = \rho^n \cdot (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad 1.7$$

Indicato quindi con μ il modulo del risultato e β la fase del risultato si ha immediatamente:

$$\mu = \rho^n \quad 1.8$$

$$\beta = n\varphi \quad 1.9$$

Radice n-esima di un numero complesso

Dovendo estrarre la radice n-esima di z si procederà come di seguito:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \cdot e^{j\varphi}} = \sqrt[n]{\rho \cdot e^{j(\varphi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{j(\varphi+2k\pi)}{n}} \quad 1.10$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad 1.11$$

La variabile k viene appunto introdotta per tenere conto della periodicità dell'esponenziale complesso. Indicato quindi con μ il modulo del risultato e β la fase del risultato si ha immediatamente:

$$\mu = \sqrt[n]{\rho} \quad 1.12$$

$$\beta_k = \left(\frac{\varphi+2k\pi}{n} \right) \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad 1.13$$

tutte le radici n-esime del numero complesso z hanno stesso modulo μ ma diversa fase β e quindi giacciono su un cerchio del piano complesso di raggio pari al modulo μ ; e risultano sfasate una rispetto all'altra del medesimo angolo δ dato dalla relazione:

$$\delta = \frac{2\pi}{n} \quad 1.14$$

La prima radice (radice principale) è sfasata rispetto all'asse reale della quantità:

$$\beta_0 = \frac{\varphi}{n} \quad 1.15$$

Le radici successive risultano sfasate rispetto all'asse reale della quantità :

$$\beta_k = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} = \beta_0 + k\delta \quad 1.16$$

A titolo di esempio in fig. 1 sono state riportate le 5 radici quinte dell'unità. Nel caso riportato in figura risulta :

$$\delta = \frac{2\pi}{5} (72^\circ) \quad 1.17$$

$$\beta_0 = \frac{0}{5} = 0 \quad 1.18$$

Si noti la presenza di una sola radice reale e positiva (la prima in quanto $\beta_0=0$) e due coppie di radici complesse coniugate.

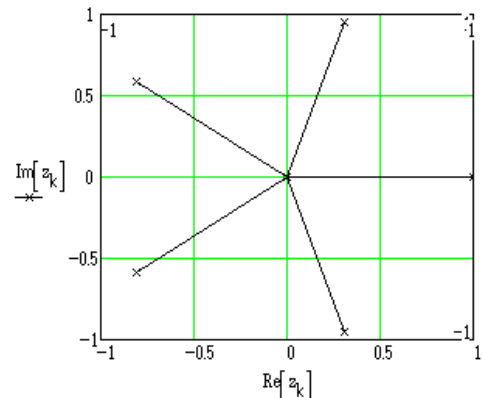


fig. 1 Radici quinte dell'unità $z=1$

In fig. 2 sono state riportate le 5 radici quinte del numero complesso :

$$z = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1.19$$

$$|z|=1 \quad \varphi = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$$

risulta :

$$\delta = \frac{2\pi}{5} (72^\circ) \quad 1.20$$

$$\beta_0 = \frac{\pi}{15} (12^\circ) \quad 1.21$$

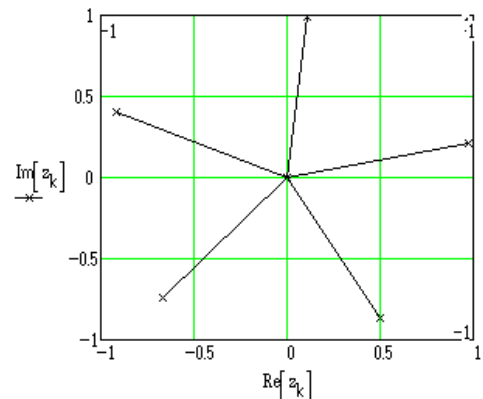


fig. 2 Altro esempio di radici quinte

Si noti che, nel caso di fig. 2, le radici non si possono più raggruppare in coppie di valori complessi coniugati.

Osservazioni

Le radici n -esime di un generico numero complesso z si trovano collocate ai vertici di un poligono regolare di N lati (n indice della radice) centrato nell'origine del piano di Gauss e inscritto entro una circonferenza di raggio μ .

L'estrazione di radice di indice pari di un **numero reale** da sempre come risultato due soluzioni reali (una positiva ed una negativa); le rimanenti radici sono raggruppabili in coppie complesse coniugate (vedi fig. 3).

L'estrazione di radice di indice dispari di un numero reale da sempre almeno una soluzione reale (la prima radice valutata con $k=0$) le rimanenti radici sono raggruppabili in coppie complesse coniugate (vedi fig. 4).

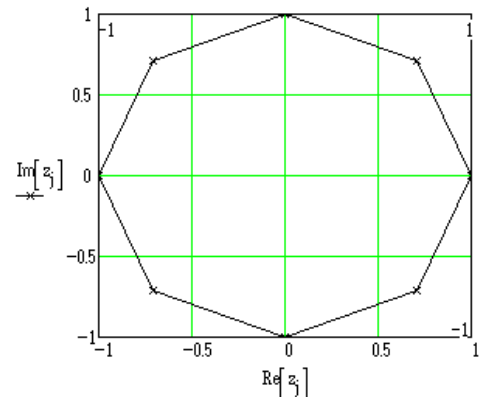


fig. 3 Ottagono regolare individuato dalle radici ottave dell'unità

Logaritmo di un numero complesso z

Dato un numero complesso di modulo ρ e fase

φ :

$$\bar{z} = \rho \cdot e^{j\varphi} = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad 1.22$$

dovendo calcolare il logaritmo di z si procederà come di seguito:

$$\log(z) = \log(\rho \cdot e^{j\varphi}) = \log(\rho \cdot e^{j(\varphi+2k\pi)}) \quad 1.23$$

$$\log(\rho \cdot e^{j(\varphi+2k\pi)}) = \log \rho + j(\varphi + 2k\pi) \quad 1.24$$

Prende il nome di valore principale della funzione logaritmo (o valore appartenente al ramo principale *principal branch*) il valore fornito dalla espressione 1.23 con $k=0$:

$$\log(z) = \log \rho + j\varphi \quad 1.25$$

Osservazioni

La formula 1.23 fornisce le modalità di calcolo del logaritmo di un numero complesso. Sarà opportuno precisare che:

- la funzione logaritmo nel campo complesso è una funzione polidroma ossia a più valori tutti caratterizzati dalla medesima parte reale:

$$\Re_e[\log(z)] = \log \rho \quad 1.26$$

e da valori diversi della parte immaginaria (valori che differiscono fra loro della quantità 2π)

$$\Im_m[\log(z)] = \varphi + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad 1.27$$

in particolare poi se il modulo ρ è uguale a 1 la parte reale del logaritmo si annulla.

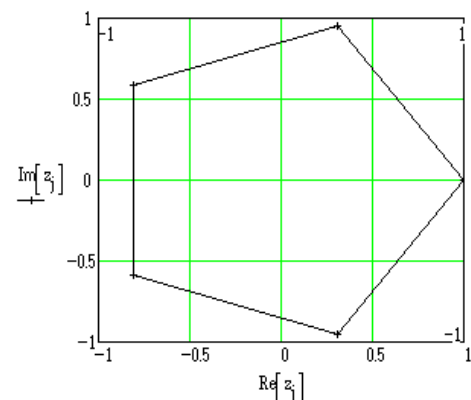


fig. 4 Poligono individuato dalle radici quinte dell'unità

- il logaritmo in campo complesso esiste anche se il numero è reale e negativo: infatti è possibile definire il suo modulo e la sua fase che vale π .

- il logaritmo in campo complesso non è definito se l'argomento è nullo; infatti l'espressione $\log p$ tende a meno infinito.

Esempi :

Elaborare le seguenti espressioni ricavando modulo e fase del risultato :

$$(4 + j5)^3$$

$$\left(2 \cdot e^{\frac{j\pi}{4}}\right)^5$$

$$(2 + j2) \cdot e^{\frac{j\pi}{2}}$$

$$\sqrt[4]{1 + j}$$

$$\sqrt[3]{27 \cdot e^{j\pi}}$$

$$\sqrt[5]{j}$$

Bibliografia:

Murray R. Spiegel
Theory and Problems of COMPLEX VARIABLES
Schaum Publishing Company New York 1964