

- SOMMARIO

<i>FENOMENI TRANSITORI IN CIRCUITI RC</i>	2
<i>Esercizio 1</i> :.....	3
<i>Osservazioni</i>	6
<i>CARICA DI UN CONDENSATORE A CORRENTE COSTANTE</i>	7
<i>Osservazioni</i>	7
<i>CIRCUITI FORMATORI DI IMPULSO</i>	7
<i>Osservazioni</i>	8
<i>FENOMENI TRANSITORI IN CIRCUITI RL</i>	9
<i>Osservazioni</i>	10
<i>CARICA DI UNA INDUTTANZA A TENSIONE COSTANTE</i>	10
<i>Osservazioni</i>	10
<i>Esercizio 2</i>	11
<i>TEMPO DI SALITA (RISE TIME)</i>	12
<i>CIRCUITO RC ALIMENTATO DA UN ONDA QUADRA</i>	13
<i>Esercizio 3</i>	15
<i>Esercizio 4</i>	15
<i>Esercizio 5</i>	16
<i>BIBLIOGRAFIA</i>	16

- *Transitori nelle reti RC ed RL*

prof. Cleto Azzani
IPSIA Moretto Brescia
12/11/95

Fenomeni transitori in circuiti RC

Si supponga di considerare il circuito di figura 12a e che all'istante $t=0$ il selettore S venga commutato in posizione 1; si vuole conoscere l'andamento nel tempo della tensione ai capi del condensatore C e della corrente che circola nel condensatore C .

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \cong C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} \quad 3.1$$

$$E = R \cdot i_C + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad 3.2$$

L'equazione appena scritta (3.2) è una equazione differenziale del primo ordine (compare solo la derivata prima) a coefficienti costanti. La sua soluzione generale (oggetto di studio nei corsi universitari di Analisi II°) porge il seguente risultato generale:

$$v_C = V_I + (V_F - V_I) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad 3.3$$

Ove si è posto $\tau=RC$. E' immediato verificare che per $t=0$ $v_C=V_i$ (valore iniziale della tensione ai capi del condensatore) per $t=\infty$ $v_C=V_f$ (valore finale della tensione ai capi del condensatore).

Il prodotto RC viene denominato "costante di tempo" e viene misurato in sec. In tabella sono riportati alcuni valori significativi delle funzioni esponenziali calcolati in corrispondenza di valori del tempo pari a 1, 2, 3, 4 e 5 costanti di tempo.

Nello specifico caso proposto in fig. 12 se all'istante $t=0$ si suppone C scarico risulta: $V_i=0$ e $V_f=E$ per cui l'espressione 3.3 si semplifica nella seguente relazione:

$$v_C = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) \quad 3.4$$

nel caso dell'intensità di corrente i_C si perviene alla seguente espressione analitica :

$$i_C = \frac{E - v_C}{R_1} = \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad 3.5$$

Con riferimento ai risultati riportati nella tabella di fig. 13 si noti che il condensatore C risulta "matematicamente carico" solo dopo un tempo infinito e che, trascorso un tempo pari a 4τ , la tensione ai capi del condensatore C ha raggiunto un livello pari al 98% della tensione di alimentazione. Convenzionalmente il condensatore C lo si può ritenere carico (regime elettrico permanente caratterizzato da una tensione v_C costante e da una corrente i_C nulla) dopo che è trascorso un tempo pari a 4τ (errore del 2%). Definiamo perciò il tempo di carica completa convenzionale T_c nel seguente modo:

$$T_c = 4 \cdot \tau \quad 3.6$$

Si supponga di considerare il circuito di figura 12 e che all'istante $t=t_1$ il selettore S venga commutato dalla posizione 1 in posizione 2; si vuole conoscere l'andamento nel tempo della tensione ai capi del condensatore C e della corrente che circola nel condensatore C . Per comodità spostiamo l'origine del sistema di assi cartesiani in t_1 . La soluzione al problema è fornita ancora dalla espressione 3.3 ove si ponga $V_i=E$ e $V_f=0$ da cui risulta immediatamente:

$$v_C = E \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad 3.7$$

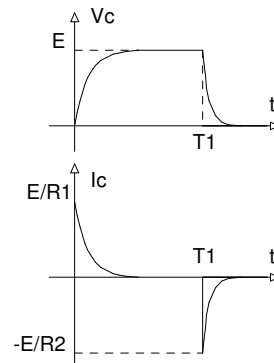
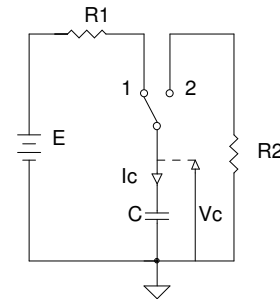


fig. 12 Carica e scarica di un condensatore

t/τ	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
0	1	0
1	0.368	0.632
2	0.135	0.865
3	0.049	0.951
4	0.018	0.982
5	0.007	0.993
∞	0	1

fig.13 tabella funzioni esponenziali

la intensità di corrente nel condensatore ora ha verso opposto rispetto al transitorio di carica ed è data dall'espressione:

$$i_C = -\frac{E}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad 3.8$$

Per meglio approfondire i concetti esposti affrontiamo la soluzione di un problema concreto.

Esercizio 1:

Dato il circuito di figura 14a :

1)- Studiare l'evoluzione in transitorio della tensione e corrente nel condensatore C1 nell'ipotesi che la I_0 del generatore abbia un andamento nel tempo come indicato in figura 14b (tempi che caratterizzano il transitorio riportati in tabella).

t1	100ms	t2	160ms	t3	200ms	t4	220ms
----	-------	----	-------	----	-------	----	-------

Soluzione

a) Per prima cosa il circuito di fig. 14a si dovrà ridurre a una rete elettrica contenente un generatore, una resistenza ed il condensatore in questione. Applicando il teorema di Thevenin o le trasformazioni circuitali Norton Thevenin (da reti contenenti generatori reali di corrente a reti contenenti generatori reali di tensione o viceversa) di ottiene il circuito di fig. 14c; in esso compare un generatore di fem V_{eq} il cui andamento nel tempo è riportato dal grafico di fig. 14d corredato di R_{eq} . I valori che caratterizzano il circuito equivalente sono ricavabili dalle seguenti espressioni:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 20K \quad 3.9$$

$$E_1 = R_1 \cdot I_1 = 50V \quad 3.10$$

$$E_2 = R_1 \cdot I_2 = -100V \quad 3.11$$

b) E' possibile ora valutare la costante di tempo τ associata al circuito di fig. 14c:

$$\tau = R_{eq} C_1 = 20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 20ms \quad 3.12$$

$$T_C = 4 \cdot \tau = 80ms \quad 3.13$$

c) Esame del transitorio V_C 0-t1

L'intervallo di tempo messo a disposizione dal generatore e di durata pari a 100ms che risulta superiore al tempo di carica T_C pertanto il condensatore C si carica completamente nel tempo di 80ms alla tensione $V_C(t_1)=50V$.

c) Esame del transitorio V_C t1-t2

L'intervallo di tempo messo a disposizione dal generatore e di durata pari $t_2-t_1=60ms=3\tau$ che risulta inferiore al tempo di carica T_C pertanto il condensatore C si carica solo parzialmente. Il valore $V_C(t_2)$ si calcola con l'espressione 3.3 ponendo nell'esponenziale $t=3\tau$, $V_i=50V$, $V_f=-100V$ da cui risulta $V_C(t_2)=-92,53V$.

c) Esame del transitorio V_C t2-t3

L'intervallo di tempo messo a disposizione dal generatore e di durata pari $t_3-t_2=40ms=2\tau$ che risulta inferiore al tempo di carica T_C pertanto il condensatore C si carica solo parzialmente. Il valore $V_C(t_3)$ si calcola con l'espressione 3.3 ponendo nell'esponenziale $t=2\tau$, $V_i=-92,53V$, $V_f=50V$ da cui risulta $V_C(t_3)=30,71V$.

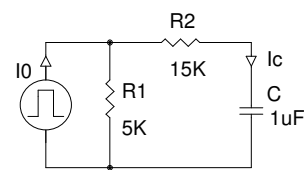


fig. 14a

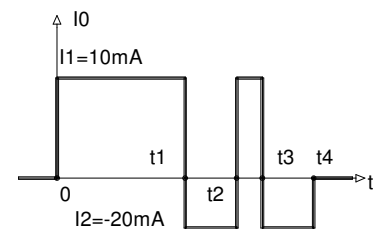


fig. 14b

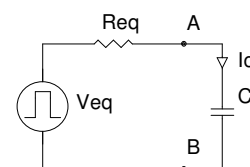


fig. 14c

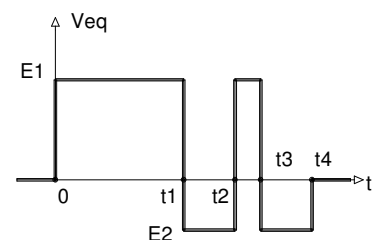


fig. 14d

c) Esame del transitorio V_c t_3 - t_4

L'intervallo di tempo messo a disposizione dal generatore e di durata pari $t_4-t_3=20\text{ms}=\tau$ che risulta inferiore al tempo di carica T_c pertanto il condensatore C si carica solo parzialmente. Il valore $V_c(t_4)$ si calcola con l'espressione 3.3 ponendo nell'esponenziale $t=\tau$, $V_i=30,71\text{V}$, $V_f=-100\text{V}$ da cui risulta $V_c(t_4)=-51,91\text{V}$.

c) Esame del transitorio V_c oltre t_4

Il generatore equivalente, oltrepassato l'istante t_4 eroga una tensione nulla perciò il condensatore C si scaricherà con legge esponenziale e costante di tempo $\tau=20\text{ms}$. Dopo un intervallo pari a T_c la tensione ai capi di C potrà essere ritenuta nulla. Risulta ovviamente:

$$t_5 = t_4 + T_c = 300\text{ms} \quad 3.14$$

Nel grafico cartesiano di fig. 15 sono riportati gli andamenti nel tempo di V_{eq} e di V_c .

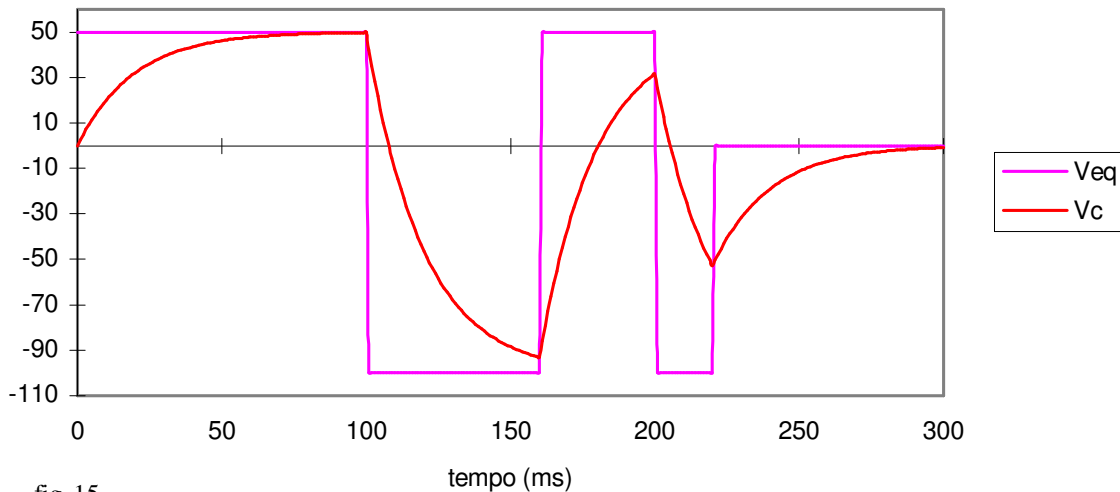


fig. 15

d) Esame dei transitori di corrente

Il valore assunto da I_c nel circuito di fig. 14c è ricavabile applicando il 2° principio di Kirchoff alla maglia per cui si ha:

$$i_c = \frac{V_{EQ} - v_C}{R_{eq}} \quad 3.15$$

Poiché l'andamento di V_{eq} risulta discontinuo nei punti: $t=0$, t_1 , t_2 , t_3 , t_4 in tali punti ovviamente I_c potrà risultare discontinua; è opportuno quindi ricavare il valore assunto da I_c a destra e a sinistra dei probabili punti di discontinuità.

e) Transitorio di corrente in $t=0$

L'espressione 3.15 va calcolata nei due punti $t=0^-$ e $t=0^+$. Risulta :

$$i_c(0^-) = \frac{V_{EQ} - v_C(0)}{R_{eq}} = \frac{0 - 0}{20 \cdot 10^3} = 0 \quad 3.16$$

$$i_c(0^+) = \frac{V_{EQ} - v_C(0)}{R_{eq}} = \frac{50 - 0}{20 \cdot 10^3} = 2,5\text{mA} \quad 3.17$$

f) Transitorio di corrente in $t=t_1$

L'espressione 3.15 va calcolata nei due punti $t=t_1^-$ e $t=t_1^+$. Risulta :

$$i_C(t_{1-}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_1)}{R_{eq}} = \frac{50 - 50}{20 \cdot 10^3} = 0 \quad 3.18$$

$$i_C(t_{1+}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_1)}{R_{eq}} = \frac{-100 - 50}{20 \cdot 10^3} = -7,5mA \quad 3.19$$

g) Transitori di corrente in t_2, t_3, t_4

Procedendo in modo analogo ai precedenti punti e), f) si perviene ai seguenti risultati :

$$i_C(t_{2-}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_2)}{R_{eq}} = \frac{-100 + 92,53}{20 \cdot 10^3} = -0,37mA \quad 3.20$$

$$i_C(t_{2+}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_2)}{R_{eq}} = \frac{50 + 92,53}{20 \cdot 10^3} = 7,13mA \quad 3.21$$

$$i_C(t_{3-}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_3)}{R_{eq}} = \frac{50 - 30,71}{20 \cdot 10^3} = 0,96mA \quad 3.22$$

$$i_C(t_{3+}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_3)}{R_{eq}} = \frac{-100 - 30,71}{20 \cdot 10^3} = -6,54mA \quad 3.23$$

$$i_C(t_{4-}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_4)}{R_{eq}} = \frac{-100 + 51,91}{20 \cdot 10^3} = -2,40mA \quad 3.24$$

$$i_C(t_{4+}) = \frac{V_{EQ} - v_C(t_4)}{R_{eq}} = \frac{0 + 51,91}{20 \cdot 10^3} = 2,59mA \quad 3.25$$

Nel grafico cartesiano di fig. 16 sono riportati gli andamenti nel tempo di i_0 e di i_C .

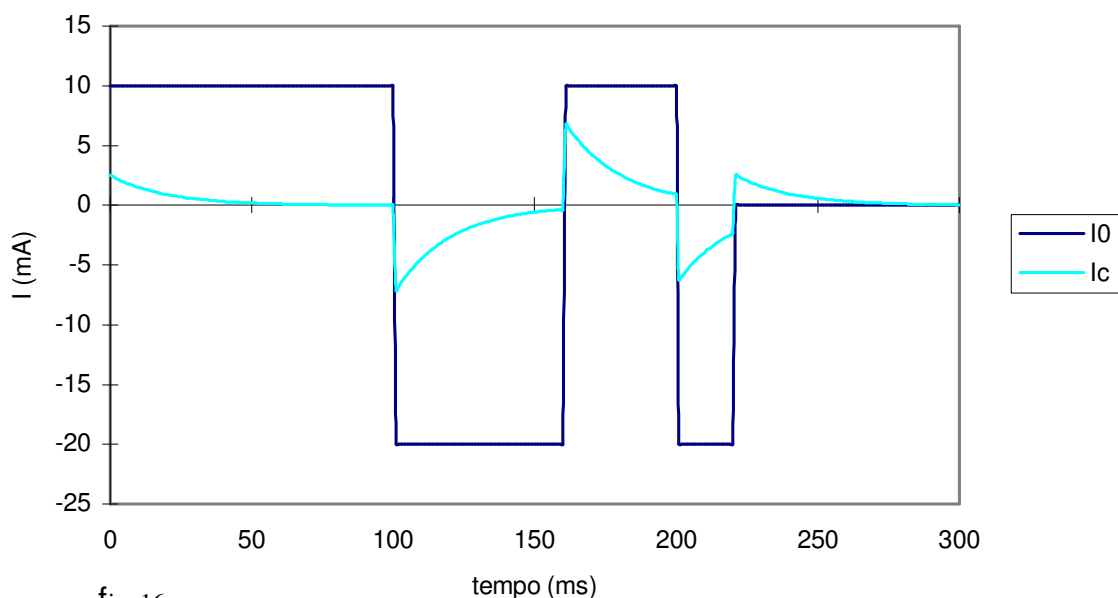


fig. 16

Osservazioni

-a) Per stabilire se, nel corso di un transitorio di carica o scarica, un condensatore C riesca a caricarsi o scaricarsi completamente bisogna confrontare il tempo a disposizione con il tempo convenzionale di carica T_c .

-b) In virtù della espressione 3.1 la tensione ai capi di un condensatore C non può subire una variazione finita in un tempo nullo, servirebbe infatti un generatore capace di fornire una corrente infinita che non può materialmente essere realizzato. Di conseguenza la tensione ai capi del condensatore C dovrà essere rappresentata da una "funzione continua del tempo" in altri termini l'andamento temporale di V_c non potrà contenere salti o discontinuità del tipo ad esempio contenuto in forme d'onda rettangolari o triangolari a dente di sega.

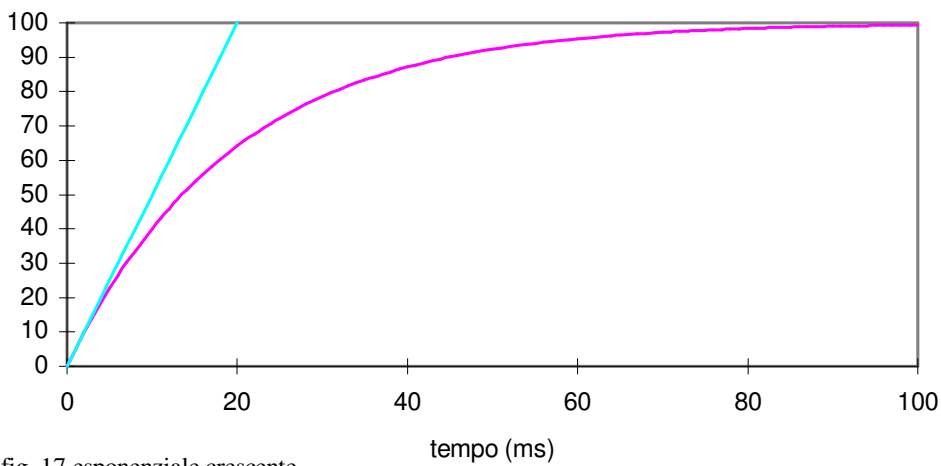


fig. 17 esponenziale crescente

-c) Nella figura 17 è riportata una curva esponenziale crescente con costante di tempo $\tau=20$ ms. Si osservi che la tangente all'esponenziale in $t=0$ interseca il valore di regime dell'esponenziale ($y=100$) all'istante

$t=\tau$. Pertanto si può concludere che data una curva esponenziale tarata è possibile desumere la sua costante di tempo τ attraverso la costruzione grafica riportata in figura. Analogo discorso vale per una curva esponenziale decrescente (vedi figura 18).

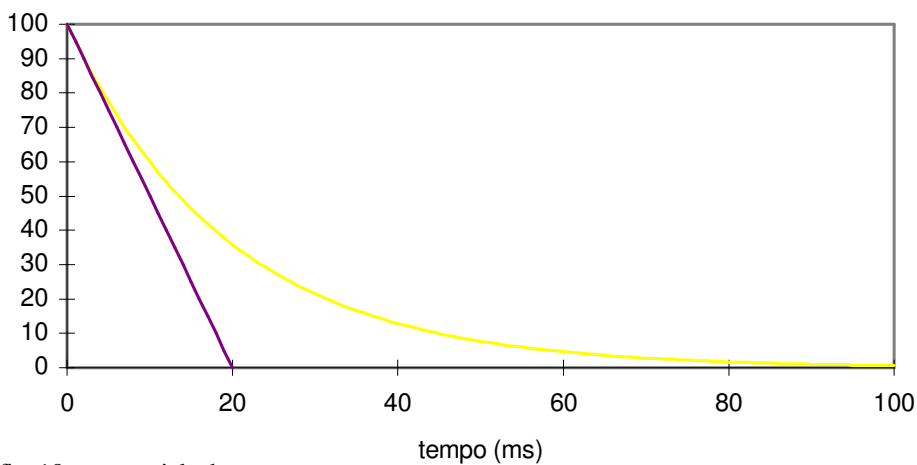


fig. 18 esponenziale decrescente

Carica di un condensatore a corrente costante

Nel circuito di fig. 19 il condensatore C viene caricato a corrente costante dal generatore di corrente I_0 . Si può quindi scrivere :

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = I_0 \quad 3.26$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{I_0}{C} = cost. \quad 3.27$$

da cui è immediato concludere:

$$v_c(t) = \frac{I_0}{C} t + V_0 \quad 3.28$$

L'espressione 3.27 assicura che la tangente alla curva

$V_c(t)$ ha inclinazione costante e quindi non può che essere una retta come indicato dalla 3.28.

Supponendo che all'istante $t=0$ il condensatore C sia scarico risulta $V_0=0$ per cui si potrà scrivere:

$$v_c(t) = \frac{I_0}{C} t \quad 3.29$$

La relazione 3.29 rappresenta graficamente una retta passante per l'origine del sistema di assi cartesiani. Il coefficiente angolare m è dato dalla relazione :

$$m = \frac{I_0}{C} \quad 3.30$$

con valori elevati di I_0 e valori bassi di C si avrà una carica rapida; con valori bassi di I_0 e valori elevati di C si avrà una carica lenta (vedi fig. 20).

Osservazioni

a) Nel caso di carica di un condensatore a corrente costante il condensatore C non raggiunge mai una condizione di regime permanente analoga a quella riscontrata nei circuiti precedenti (fig. 12). La presenza di un generatore di corrente fa sì che indipendentemente dalla V_c giunga continuamente corrente al condensatore con conseguente progressivo aumento della V_c .

Da un punto di vista tecnico però, un generatore di corrente non eroga più corrente costante qualora si superi la sua tensione massima ai morsetti (compliance voltage); pertanto, la V_c non potrà di certo superare questo valore che è caratteristico di un generatore di corrente.

Circuiti formatori di impulso

Una particolare applicazione dei circuiti RC è rappresentata dai cosiddetti circuiti formatori di impulso; essi vengono impiegati per ricavare da un segnale rettangolare di ingresso un segnale impulsivo in uscita. Sono circuiti nei quali la costante di tempo τ risulta essere molto piccola rispetto alle durate T_1 (a livello alto) e T_0 (a livello basso) del segnale di ingresso.

Con riferimento al circuito di fig. 21 si noti che in corrispondenza a ogni fronte di salita del segnale di ingresso il circuito fornisce in uscita un impulso positivo di ampiezza E e durata 4τ ; in corrispondenza a ogni fronte di discesa del segnale di ingresso il circuito fornisce un impulso negativo di ampiezza $-E$ e durata 4τ . Supponiamo C inizialmente scarico, quando la tensione del generatore V_g passa da 0 a E , la brusca variazione di tensione si trasferisce ai capi della resistenza. Con il trascorrere del tempo, la tensione ai capi di C cresce e perciò cala la tensione ai capi di R; trascorso un tempo pari a 4τ la tensione V_c ha raggiunto il suo massimo valore E , la tensione ai capi della resistenza raggiunge quindi il valore 0. Nell'istante T_1 a condensatore C carico (armatura sinistra positiva rispetto a quella destra) la tensione del generatore passa bruscamente al valore 0; ai capi della resistenza R si presenterà quindi una ddp negativa che perciò darà origine a un impulso negativo anch'esso della durata 4τ (vedi in proposito i grafici riportati in fig.22).

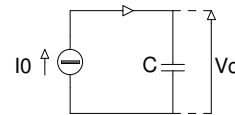


fig. 19

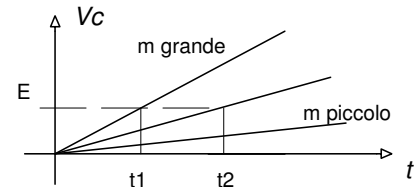


fig. 20 Legge di carica del condensatore

Con riferimento al circuito di fig. 23 si noti che quando la tensione del generatore assume valore 0, il condensatore C si carica attraverso la resistenza R alla tensione del generatore E; in uscita V_u praticamente coincide con la V_c . Quando la tensione del generatore V_g passa da 0 a E, la brusca variazione di tensione si trasferisce in uscita che dal valore E passa istantaneamente a 2E (le due ddp hanno verso concorde). Con il trascorrere del tempo, la tensione ai capi di C tende a 0 in quanto C si scarica (a regime la ddp fra le due armature tende a 0) la tensione di uscita V_u dal valore istantaneo iniziale 2E si porta progressivamente al valore di regime E. Nell'istante T_1 , a condensatore C scarico, la tensione in uscita al circuito passa bruscamente a 0 e risale al valore E nel tempo richiesto dal condensatore C per ricaricarsi.

Osservazioni

a) I circuiti formatori di impulso (tipo A e B) vengono largamente usati in circuiti di pilotaggio di monostabili o in circuiti di temporizzazione. Sovente si trovano presenti assieme a elementi logici sia della famiglia TTL che CMOS. In tali contesti circuitali è opportuno eliminare uno dei due impulsi generati perché non compatibile con le dinamiche di ingresso. Nel formatore di fig. 21 (tipo A) viene generalmente eliminato, con l'uso di un diodo, l'impulso negativo presente in uscita. Il circuito così modificato diviene un formatore di impulso sui fronti di salita. Nel formatore di fig. 23 (tipo B) viene generalmente eliminato con l'uso di un diodo l'impulso che estende la dinamica dell'uscita da E a 2E. Il circuito così modificato prende il nome di formatore di impulso sui fronti di discesa.

b) I circuiti formatori di impulso vengono a volte impropriamente chiamati circuiti derivatori e tale funzione è posta in relazione alla generazione di forme d'onda impulsive in uscita. Se riscriviamo la espressione 3.2 al circuito di fig. 21 si ottiene:

$$v_G = v_R + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad 3.31$$

Nella espressione 3.31, solamente se si verifica la condizione:

$$v_R \ll v_C \rightarrow v_C \cong v_G \quad 3.32$$

risulta di conseguenza :

$$v_U = v_R = RC \frac{dv_C}{dt} \cong RC \frac{dv_G}{dt} \quad 3.33$$

L'espressione 3.33 permette di concludere che la tensione in uscita risulta all'incirca proporzionale alla derivata prima della tensione del generatore purché sia verificata la condizione 3.32. Se facciamo riferimento ai grafici di fig. 22 e fig. 24 osserviamo che negli istanti in cui si presenta la brusca variazione del segnale di ingresso (punti di discontinuità di V_g) la condizione 3.32 non risulta assolutamente verificata; in tali punti infatti risulta :

$$v_G = v_R \quad v_C = 0 \quad 3.34$$

da cui la inopportunità di accostare il comportamento di circuito derivatore a quello di circuito formatore di impulso.

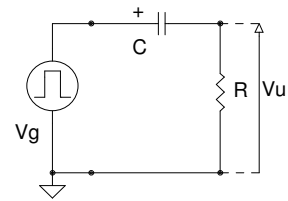


fig. 21 Formatore (tipo A)

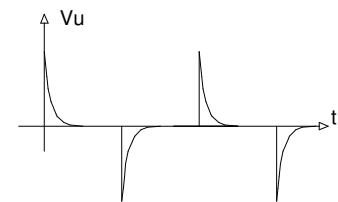
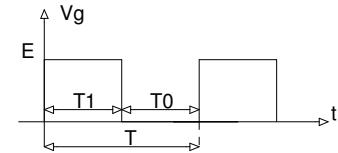


fig. 22 Andamenti di V_g e V_u

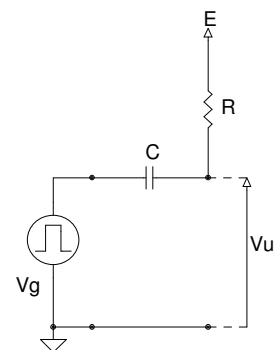


fig. 23 Formatore (tipo B)

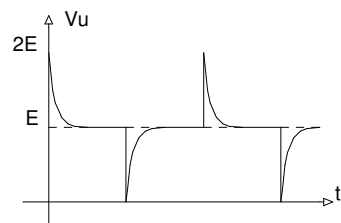
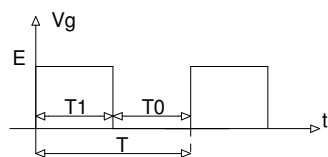


fig. 24 Andamenti di V_g e V_u

Fenomeni transitori in circuiti RL

Considerazioni del tutto analoghe a quelle presentate nell'ambito dei circuiti RC possono essere sviluppate per i circuiti RL. Infatti la relazione che lega tensione a corrente in un induttanza è formalmente analoga alla relazione 3.1 che lega corrente a tensione in un condensatore.

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \cong L \frac{\Delta i_L}{\Delta t} \quad 3.35$$

Si supponga di considerare il circuito di figura 25a e che all'istante $t=0$ il selettore S venga commutato in posizione 1; si vuole conoscere l'andamento nel tempo della intensità di corrente che percorre la induttanza L e della tensione ai capi dell'induttanza L. Scrivendo il secondo principio di Kirchoff alla maglia si ha:

$$E = R \cdot i_L + v_L = R \cdot i_L + L \frac{di_L}{dt} \quad 3.36$$

L'equazione 3.36 è una equazione differenziale del primo ordine (compare solo la derivata prima) a coefficienti costanti. La sua soluzione generale porta al seguente risultato generale:

$$i_L = I_f + (I_i - I_f) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad 3.37$$

Il termine $\tau=L/R$ viene denominato "costante di tempo" e viene misurato in sec. E' immediato verificare che per $t=0$ $I=i$ (valore iniziale della corrente nell'induttanza) per $t=\infty$ $I=I_f$ (valore finale della corrente nell'induttanza). Conservano la loro validità le considerazioni e le conclusioni effettuate nell'analizzare la tabella di fig. 13. Definiamo perciò anche in questo caso il tempo di carica convenzionale T_c nel seguente modo:

$$T_c = 4 \cdot \tau \quad 3.38$$

Nello specifico caso proposto in fig. 25 se all'istante $t=0$ si suppone L scarica risulta: $i=0$ e $I_f=E/R$ per cui l'espressione 3.37 si semplifica nella seguente relazione:

$$i_L = \frac{E}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \quad 3.39$$

nel caso della tensione ai capi dell'induttanza L si perviene alla seguente espressione analitica :

$$v_L = E - R_1 \cdot i_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad 3.40$$

Si supponga di considerare il circuito di figura 25 e che all'istante $t=t_1$ il selettore S venga commutato dalla posizione 1 in posizione 2; si vuole conoscere l'andamento nel tempo della intensità di corrente che percorre la induttanza L e della tensione ai capi dell'induttanza L. Per comodità spostiamo l'origine del sistema di assi cartesiani in t_1 . La soluzione al problema è fornita ancora dalla espressione 3.37 ove si ponga $i=E/R_1$ e $I_f=0$ da cui risulta immediatamente:

$$i_L = \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad 3.41$$

la tensione ai capi dell'induttanza L ora ha verso opposto rispetto al transitorio di carica in quanto l'induttanza ora si comporta da generatore; essa è data dall'espressione :

$$v_L = -\frac{E \cdot R_2}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad 3.42$$

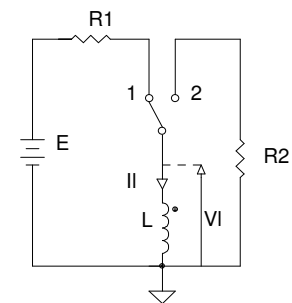
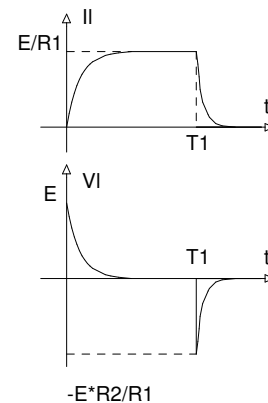


fig. 25a



Osservazioni

-a) Per stabilire se, nel corso di un transitorio di carica o scarica, un'induttanza L riesca a caricarsi o scaricarsi completamente bisogna confrontare il tempo a disposizione con il tempo convenzionale di carica T_c .

-b) In virtù della espressione 3.35 l'intensità di corrente che circola in una induttanza non può subire una variazione finita in un tempo nullo, servirebbe infatti un generatore capace di fornire una tensione infinita che non può materialmente essere realizzato. Di conseguenza la intensità di corrente che circola in una induttanza dovrà essere rappresentata da una "funzione continua del tempo"; in altri termini l'andamento temporale di IL non potrà contenere salti o discontinuità del tipo ad esempio contenuto in forme d'onda rettangolari o triangolari a dente di sega.

Carica di una induttanza a tensione costante

Nel circuito di fig. 26 l'induttanza L viene caricata a tensione costante dal generatore di tensione E . Si può quindi scrivere :

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = E \quad 3.43$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} = \text{cost.} \quad 3.44$$

da cui è immediato concludere:

$$i_L(t) = \frac{E}{L}t + I_0 \quad 3.45$$

L'espressione 3.44 assicura che la tangente alla curva $IL(t)$ ha inclinazione costante e quindi non può che essere una retta come indicato dalla 3.45.

Supponendo che all'istante $t=0$ l'induttanza L sia scarica risulta $i_0=0$ per cui si potrà scrivere:

$$i_L(t) = \frac{E}{L}t \quad 3.46$$

La relazione 3.46 rappresenta graficamente una retta passante per l'origine del sistema di assi cartesiani. Il coefficiente angolare m è dato dalla relazione :

$$m = \frac{E}{L} \quad 3.47$$

con valori elevati di E e valori bassi di L si avrà una carica rapida; con valori bassi di E e valori elevati di L si avrà una carica lenta (vedi fig. 27).

Osservazioni

a) Nel caso di carica di un'induttanza a tensione costante essa non raggiunge mai una condizione di regime permanente analoga a quella riscontrata nei circuiti RL . La presenza di un generatore di tensione costante E fa sì che la corrente nell'induttanza IL progressivamente continui ad aumentare.

Da un punto di vista tecnico però, un generatore di tensione è caratterizzato da un valore massimo della corrente erogabile superato il quale esso non è più in grado di mantenere una ddp costante ai suoi morsetti; ne consegue che la corrente IL non potrà certo superare questo valore.

Nel caso poi di induttanze avvolte su nucleo di materiale ferromagnetico, si deve pure tenere presente che in caso di eccessivo aumento della corrente il materiale magnetico può saturarsi; ciò si traduce nel fatto che L non risulta costante al variare di IL e quindi v_L non è detto che cresca con legge lineare.

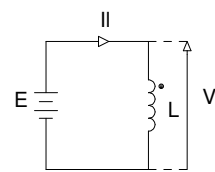


fig. 26

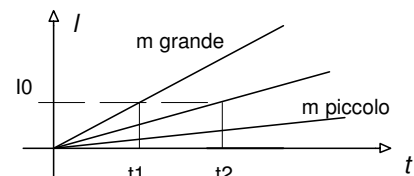


fig. 27 Carica di L a V costante

Esercizio 2

Dato il circuito di figura 28 :

1)- Studiare l'evoluzione in transitorio della corrente nell'induttanza IL e della tensione VL nell'ipotesi che le manovre sugli interruttori del circuito avvengano a transitorio completamente esaurito.

All'istante $t=0$ l'induttanza $L1$ si trova in condizioni di regime elettrico (induttanza completamente carica) $S2$ si trova in posizione; all'istante $t1$, $S2$ passa dalla posizione 1 nella posizione 2; all'istante $t2$, $S2$ passa dalla posizione 2 nella posizione 3.

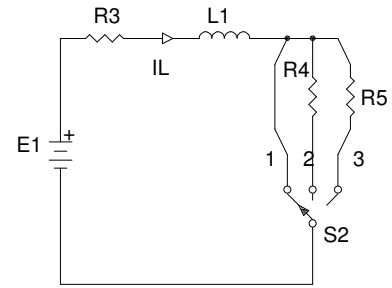


fig. 28

Soluzione

a) All'istante $t=0$ il selettore $S2$ si trova in posizione 1; nel circuito circola l'intensità di corrente IL che assume il valore:

$$I_L = \frac{E_1}{R_3} = \frac{100}{100} = 1A \quad 3.48$$

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_3} = \frac{0,4}{100} = 4ms \quad 3.49$$

c) Esame del transitorio IL $t1-t2$

Nell'istante $t1$ il selettore $S2$ viene commutato in posizione 2; la nuova corrente di regime che si stabilirà nel circuito assumerà il valore:

$$I_L = \frac{E_1}{R_3 + R_4} = \frac{100}{1500} = 66,67mA \quad 3.50$$

La costante di tempo che caratterizza il transitorio è data da :

$$\tau_2 = \frac{L_1}{R_3 + R_4} = \frac{0,4}{1500} = 0,267ms \quad 3.51$$

d) Esame del transitorio IL $t2-t3$

Nell'istante $t3$ il selettore $S2$ viene commutato in posizione 3; la nuova corrente di regime che si stabilirà nel circuito assume il valore:

$$I_L = \frac{E_1}{R_3 + R_5} = \frac{100}{100100} \cong 1mA \quad 3.52$$

La costante di tempo che caratterizza il transitorio è data da :

$$\tau_3 = \frac{L_1}{R_3 + R_5} = \frac{0,4}{100100} \cong 4\mu s \quad 3.53$$

d) Esame dei transitori di tensione VL

Il valore assunto da VL nel circuito di fig. 28 è ricavabile applicando il 2° principio di Kirchoff alla maglia per cui si ha:

$$v_L = E - R_T \cdot i_L \quad 3.54$$

Per effetto delle commutazioni del circuito VL potrà risultare discontinua; è opportuno quindi ricavare il valore assunto da VL a destra e a sinistra dei probabili punti di discontinuità.

e) Transitorio di tensione in $t=t1$

L'espressione 3.54 va calcolata nei due punti $t=t1-$ e $t=t1+$. Risulta :

$$v_L(t_{1-}) = E - R_3 \cdot i_L(t_1) = 0 \quad (\text{induttanza completamente carica}) \quad 3.55$$

$$v_L(t_{1+}) = E - (R_3 + R_4) \cdot i_L(t_1) = 100 - 1500 = -1400V \quad 3.56$$

e) Transitorio di tensione in $t=t_2$

L'espressione 3.54 va calcolata nei due punti $t=t_2^-$ e $t=t_2^+$. Risulta :

$$v_L(t_{2-}) = E - (R_3 + R_4) \cdot i_L(t_2) = 0 \quad (\text{induttanza completamente carica}) \quad 3.57$$

$$v_L(t_{2+}) = E - (R_3 + R_5) \cdot i_L(t_2) = 100 - 10^5 \cdot 66,67 \cdot 10^{-3} = -6567V \quad 3.58$$

Tempo di salita (rise time)

Si è visto che in un circuito RC sottoposto all'azione di un ingresso a gradino la tensione ai capi del condensatore C varia con legge esponenziale

$$v_C = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad 3.59$$

Si definisce tempo di salita t_r il tempo necessario perchè V_C salga dal 10% E al 90% E. Imponendo quindi le due condizioni :

$$v_C(t_1) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = 0,1 \cdot E \quad 3.60$$

$$v_C(t_2) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}\right) = 0,9 \cdot E \quad 3.61$$

si ricava con semplici passaggi matematici :

$$t_1 = \tau \cdot \ln \frac{1}{0,9} \cong 0,1 \cdot \tau \quad 3.62$$

$$t_2 = \tau \cdot \ln 10 \cong 2,3 \cdot \tau \quad 3.63$$

da cui infine:

$$t_r = t_2 - t_1 = 2,2 \cdot \tau \quad 3.64$$

Il tempo di salita precedentemente definito ed espresso dalla 3.64 è un parametro che definisce il comportamento della rete RC nel "dominio del tempo". Come è noto la frequenza di taglio f_T caratterizza il comportamento dello stesso circuito nel dominio della frequenza. E' noto che :

$$f_T = \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} \quad 3.65$$

da cui ricavando τ si ha:

$$\tau = \frac{1}{2\pi \cdot f_T} \quad 3.66$$

E' importante porre in relazione la 3.64 con la 3.66:

$$t_r = 2,2 \cdot \tau = \frac{2,2}{2\pi \cdot f_T} \quad 3.67$$

$$t_r \cdot f_T = \frac{2,2}{2\pi} = 0,35 \quad 3.68$$

La relazione 3.68 afferma che esiste legame di proporzionalità inversa fra tempo di salita t_r e frequenza di taglio f_T possiamo quindi concludere che reti RC dotate di tempo di salita elevato sono caratterizzate da frequenza di taglio bassa e viceversa.

Circuito RC alimentato da un onda quadra

Esaminiamo un circuito RC alimentato da un generatore di onde quadre con dinamica V_{CC} V_{EE} , frequenza f e duty cycle d (fig. 29). Ci proponiamo di trovare la relazione matematica che intercorre fra i vari parametri che caratterizzano il generatore ed i valori V_1 e V_2 che si stabiliscono a regime ai capi del condensatore.

Esaurito il transitorio iniziale caratterizzato dal fatto che per $t=0$ ai capi del condensatore si ha una $V_C=0$, in condizioni di regime permanente si avrà la situazione riportata nel grafico di fig. 30. Lo studio dovrà essere condotto a partire dalla relazione 3.69 qui sotto trascritta

$$v_C = V_1 + (V_F - V_1) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad 3.69$$

Se iniziamo a studiare il transitorio di carica di C di durata T_1 (generatore che eroga V_{CC}) dovremo scrivere:

$$\begin{aligned} v_G(0+) &= V_{CC} \\ v_C(0) &= V_1 \\ v_C(T_1) &= V_2 \end{aligned} \quad 3.70$$

la relazione 3.69 assumerà perciò la forma:

$$V_2 = V_1 + (V_{CC} - V_1) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_1}{\tau}}\right) = V_1 + (V_{CC} - V_1) \cdot (1 - \alpha) \quad 3.71$$

avendo posto:

$$\alpha = e^{-\frac{T_1}{\tau}} \quad 3.72$$

Impostando lo studio del transitorio di scarica di C di durata T_0 (generatore che eroga V_{EE} e asse delle V traslato in $t=T_1$) dovremo scrivere:

$$\begin{aligned} v_G(0+) &= V_{EE} \\ v_C(0) &= V_2 \\ v_C(T_0) &= V_1 \end{aligned} \quad 3.73$$

la relazione 3.69 assumerà perciò la forma:

$$V_1 = V_2 + (V_{EE} - V_2) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right) = V_2 + (V_{EE} - V_2) \cdot (1 - \beta) \quad 3.74$$

avendo posto:

$$\beta = e^{-\frac{T_0}{\tau}} \quad 3.75$$

Ponendo in sistema le relazioni 3.71 e 3.74 si ha:

$$\begin{cases} V_2 = V_1 + (V_{CC} - V_1) \cdot (1 - \alpha) \\ V_1 = V_2 + (V_{EE} - V_2) \cdot (1 - \beta) \end{cases} \quad 3.76$$

da cui si ha immediatamente:

$$\begin{cases} V_2 = V_{CC} \cdot (1 - \alpha) + \alpha \cdot V_1 \\ V_1 = V_{EE} \cdot (1 - \beta) + \beta \cdot V_2 \end{cases} \quad 3.77$$

risolvendo rispetto a V_1 e V_2 si ottengono le soluzioni:

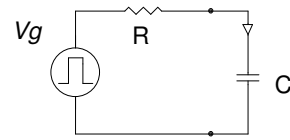


fig. 29

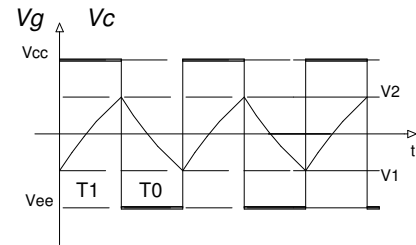


fig. 30

$$\begin{cases} V_2 = \frac{V_{CC} \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} + \frac{\alpha \cdot V_{EE} (1 - \beta)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} \\ V_1 = \frac{V_{EE} \cdot (1 - \beta)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} + \frac{\beta \cdot V_{CC} (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} \end{cases} \quad 3.78$$

I risultati del tutto generali presentati nella 3.78 si semplificano in modo consistente qualora si ipotizzi che il circuito si trovi nelle più comuni situazioni che si possono materialmente presentare nella realtà. Sono degne di particolare attenzione le seguenti situazioni:

a) Generatore bipolare simmetrico :

$$V_{CC} = -V_{EE} \quad 3.79$$

$$V_2 = \frac{V_{CC} \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} + \frac{\alpha \cdot V_{CC} (\beta - 1)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = V_{CC} \frac{1 - 2 \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta}{(1 - \alpha \beta)} \quad 3.80$$

$$V_1 = \frac{V_{CC} \cdot (\beta - 1)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} + \frac{\beta \cdot V_{CC} (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = V_{CC} \frac{2 \cdot \beta - 1 - \alpha \cdot \beta}{(1 - \alpha \beta)}$$

b) Generatore unipolare :

$$V_{EE} = 0 \quad 3.81$$

$$V_2 = \frac{V_{CC} \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} \quad 3.82$$

$$V_1 = \frac{\beta \cdot V_{CC} (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)}$$

Nei due casi sopraindicati è interessante calcolare il valore della tensione picco-picco presente su C:

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad 3.83$$

e la media dei valori V1 e V2 (semisomma dei V1 e V2):

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad 3.84$$

c) ΔV e V_m generatore bipolare simmetrico:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 2 \cdot V_{CC} \frac{1 - \alpha - \beta + \alpha \beta}{(1 - \alpha \beta)} \quad 3.85$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_{CC} \frac{(\beta - \alpha)}{(1 - \alpha \beta)}$$

d) ΔV e V_m generatore unipolare:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_{CC} \frac{1 - \alpha - \beta + \alpha \beta}{(1 - \alpha \beta)} \quad 3.86$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_{CC} \frac{1 - \alpha + \beta - \alpha \beta}{2 \cdot (1 - \alpha \beta)}$$

Le espressioni 3.80, 3.82, 3.85 e 3.86 si semplificano ulteriormente qualora il duty cycle del generatore sia pari al 50%. Ciò implica che:

$$T_1 = T_0 = \frac{T}{2} \rightarrow \alpha = \beta \quad 3.87$$

e) generatore bipolare simmetrico con duty-cycle pari al 50% :

$$V_2 = V_{CC} \frac{1 - 2\alpha + \alpha \beta}{1 - \alpha \beta} = V_{CC} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad 3.88$$

$$V_1 = V_{CC} \frac{2\beta - 1 - \alpha \beta}{1 - \alpha \beta} = V_{CC} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

f) ΔV e V_m generatore bipolare simmetrico con duty-cycle pari al 50% :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 2 \cdot V_{CC} \left(1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right) \quad 3.89$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_{CC} \frac{1 - \alpha + \alpha - 1}{\alpha + 1} = 0$$

g) generatore unipolare con duty-cycle pari al 50% :

$$V_2 = \frac{V_{CC} \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = \frac{V_{CC}}{1 + \alpha} \quad 3.90$$

$$V_1 = \frac{\beta \cdot V_{CC} (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = \frac{\alpha \cdot V_{CC}}{1 + \alpha}$$

h) ΔV e V_m generatore unipolare con duty-cycle pari al 50% :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_{CC} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad 3.91$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{V_{CC}}{2}$$

Esercizio 3

Un circuito RC come riportato in fig. 29 con $R=10 \text{ K}\Omega$ e $C=47 \text{ nF}$ viene alimentato da un generatore bipolare di onde quadre con $V_{CC}=-V_{EE}=12 \text{ V}$; la frequenza del generatore vale 1 Khz , il duty-cycle è pari al 80%. Determinare il valore massimo positivo V_2 e minimo negativo V_1 della tensione presente ai capi di C .

Soluzione

Nota la frequenza del generatore è possibile calcolare T , noto il duty-cycle è possibile calcolare sia T_0 che T_1 .

$$T = \frac{1}{f} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ sec} = 1 \text{ ms}$$

$$T_1 = d \cdot T = 0,8 \text{ ms} \quad T_0 = T - T_1 = (1 - d) \cdot T = 0,2 \text{ ms}$$

inoltre si ha:

$$\tau = R \cdot C = 470 \cdot 10^{-6} \text{ sec} = 470 \text{ }\mu\text{s}$$

$$\alpha = e^{-\frac{T_1}{\tau}} = 0,182 \quad \beta = e^{-\frac{T_0}{\tau}} = 0,653$$

pertanto si ha:

$$V_2 = V_{CC} \frac{1 - 2 \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta}{(1 - \alpha \beta)} = 10,28 \text{ V} \quad V_1 = V_{CC} \frac{2 \cdot \beta - 1 - \alpha \cdot \beta}{(1 - \alpha \beta)} = 2,55 \text{ V}$$

inoltre si ha:

$$\Delta V = 2 \cdot V_{CC} \frac{1 - \alpha - \beta + \alpha \beta}{(1 - \alpha \beta)} = 7,73 \text{ V}$$

$$V_m = V_{CC} \frac{(\beta - \alpha)}{(1 - \alpha \beta)} = 6,41 \text{ V}$$

Esercizio 4

Un circuito RC come riportato in fig. 29 con $R=10 \text{ K}\Omega$ e $C=3,3 \text{ nF}$ viene alimentato da un generatore unipolare di onde quadre con $V_{CC}=12 \text{ V}$; la frequenza del generatore vale 10 Khz , il duty-cycle è pari al 50%. Determinare il valore massimo positivo V_2 e minimo negativo V_1 della tensione presente ai capi di C .

Soluzione

Nota la frequenza del generatore è possibile calcolare T, noto il duty-cycle è possibile calcolare sia T0 che T1.

$$T = \frac{1}{f} = 10^{-4} \text{ sec} = 100 \mu\text{s}$$

$$T_1 = d \cdot T = 50 \mu\text{s} \quad T_0 = T - T_1 = (1 - d) \cdot T = 50 \mu\text{s}$$

inoltre si ha:

$$\tau = R \cdot C = 33 \cdot 10^{-6} \text{ sec} = 33 \mu\text{s}$$

$$\alpha = \beta = e^{-\frac{T_1}{\tau}} = 0,22$$

$$V_2 = \frac{V_{CC}}{1 + \alpha} = 9,84 \text{ V} \quad V_1 = \frac{\alpha \cdot V_{CC}}{1 + \alpha} = 2,16 \text{ V}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_{CC} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = 7,67 \text{ V}$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{V_{CC}}{2} = 6 \text{ V}$$

Esercizio 5

Un circuito RC come riportato in fig. 29 con R=10 KΩ e C= 3,3 nF viene alimentato da un generatore unipolare di onde quadre con Vcc=12V; la frequenza del generatore vale 10 Khz, il duty-cycle è pari al 75%. Determinare il valore massimo positivo V2 e minimo negativo V1 della tensione presente ai capi di C.

Soluzione

Nota la frequenza del generatore è possibile calcolare T, noto il duty-cycle è possibile calcolare sia T0 che T1.

$$T = \frac{1}{f} = 10^{-4} \text{ sec} = 100 \mu\text{s}$$

$$T_1 = d \cdot T = 75 \mu\text{s} \quad T_0 = T - T_1 = (1 - d) \cdot T = 25 \mu\text{s}$$

inoltre si ha:

$$\tau = R \cdot C = 33 \cdot 10^{-6} \text{ sec} = 33 \mu\text{s}$$

$$\alpha = e^{-\frac{T_1}{\tau}} = 0,103 \quad \beta = e^{-\frac{T_0}{\tau}} = 0,469$$

$$V_2 = \frac{V_{CC} \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = 11,31 \text{ V} \quad V_1 = \frac{\beta \cdot V_{CC} (1 - \alpha)}{(1 - \alpha \cdot \beta)} = 5,304 \text{ V}$$

$$\Delta V = V_{CC} \frac{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta}{(1 - \alpha\beta)} = 6,006 \text{ V}$$

$$V_m = V_{CC} \frac{1 - \alpha + \beta - \alpha\beta}{2 \cdot (1 - \alpha\beta)} = 8,31 \text{ V}$$

Bibliografia

Mario Pezzi	<i>Elettrotecnica Generale</i>	Zanichelli Bologna
Giometti Frascari	<i>Manuale per il Laboratorio di Misure Elettroniche</i>	Calderini Bologna
Joseph A. Edminister	<i>Electric Circuits</i>	Schaum
Millmann and Taub	<i>Pulse, Digital and Switching Waveforms</i>	McGraw Hill
Houpis Lubelfeld	<i>Outline of Pulse Circuits</i>	Regents