

## SOMMARIO

|  |   |
|--|---|
| MISURA DI FREQUENZA CON IL METODO DEI BATTIMENTI ..... | 2 |
| Premesse di carattere teorico sui Battimenti .....     | 2 |
| Il circuito di misura.....                             | 3 |
| Modalità di svolgimento della misura .....             | 4 |
| <i>Modulazione d'intensità dell'asse z</i> .....       | 4 |
| Modalità di svolgimento della misura .....             | 5 |
| <i>Metodo delle figure di Lissajous</i> .....          | 5 |
| Premesse di carattere teorico.....                     | 5 |
| Modalità di svolgimento della misura .....             | 6 |
| <i>Misura di sfasamento all'oscilloscopio</i> .....    | 6 |
| Premesse di carattere teorico.....                     | 6 |
| Modalità di svolgimento della misura .....             | 7 |
| <i>Misura di Mutua Induttanza</i> .....                | 7 |
| Considerazioni sul fattore di bontà Q .....            | 9 |
| BIBLIOGRAFIA.....                                      | 9 |

### *Misure di Frequenza e di Mutua Induttanza*

prof. Cleto Azzani  
IPSIA Moretto Brescia

a.s. 1993-94

## Misura di frequenza con il metodo dei Battimenti

Il metodo dei Battimenti viene usato per effettuare la misura di frequenza di una sorgente alternata sinusoidale attraverso confronto con un generatore campione; tale metodo è estremamente diffuso in campo musicale per accordare gli strumenti musicali (violino chitarra pianoforte, ecc.). Il raggiungimento della condizione di battimento assicura che le vibrazioni dello strumento musicale avvengono ad una frequenza praticamente uguale a quella campione.

### Premesse di carattere teorico sui Battimenti

Si abbiano due generatori di fem alternata sinusoidale di ampiezza uguale, frequenza diversa connessi fra di loro in serie come indicato in fig. 1 :

$$v_1 = V_M \sin \omega_1 t \quad \text{frequenza } f_1 \quad 5.1$$

$$v_2 = V_M \sin \omega_2 t \quad \text{frequenza } f_2 \quad 5.2$$

La ddp che si genera tra i punti A e B è data dall'espressione:

$$v_{AB} = v_1 + v_2 = V_M (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \quad 5.3$$

ricordando dalla trigonometria che risulta :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad 5.4$$

e sostituendo nella espressione 5.3 si ottiene :

$$v_{AB} = 2V_M \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \quad 5.5$$

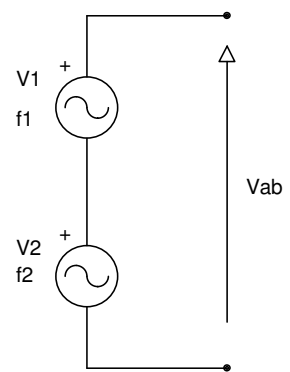


fig. 1 Circuito

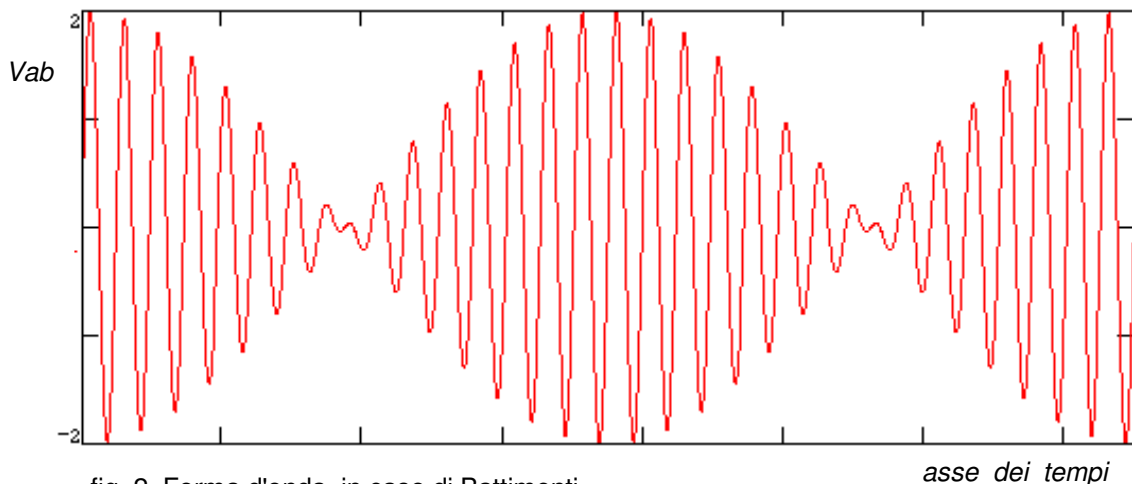


fig. 2 Forma d'onda in caso di Battimenti

posto

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2 \quad 5.6$$

risulta

$$\omega_1 = \omega_2 + \Delta \omega \quad 5.7$$

$$v_{AB} = 2V_M \cos \frac{\Delta \omega \cdot t}{2} \sin \left( \omega_2 + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \quad 5.8$$

Nell'ipotesi che risulti :

$$\omega_1 \cong \omega_2$$

$$\Delta \omega \ll \omega_1 \quad 5.9$$

$$\Delta \omega \ll \omega_2$$

si avrà :

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \cong 0 \quad 5.10$$

inoltre :

$$\omega_2 + \frac{\Delta\omega}{2} \cong \omega_2 \quad 5.11$$

L'espressione 5.8 assume la forma :

$$v_{AB} \cong 2V_M \cos \frac{\Delta\omega \cdot t}{2} \sin \omega_2 t \quad 5.12$$

Il segnale che risulta è rappresentato da una sinusoide di pulsazione approssimativamente uguale ad  $\omega_2$  (o  $\omega_1$ ) il cui valore massimo varia nel tempo con legge cosinusoidale come si nota in fig. 2. Si dice anche che l'ampiezza della sinusoide viene modulata con legge cosinusoidale.

Con riferimento al grafico di fig. 2 si chiamano nodi della forma d'onda i punti in corrispondenza ai quali la  $V_{ab}$  risulta nulla:  $v_1$  e  $v_2$  risultano in tal caso in opposizione di fase; prendono nome di ventri della forma d'onda i punti in corrispondenza ai quali la  $V_{ab}$  assume valore massimo;  $v_1$  e  $v_2$  risultano in tal caso in fase fra loro e la risultante ha ampiezza  $2V_M$ . L'intervallo temporale che intercorre fra due nodi consecutivi dipende dalla differenza fra le due frequenze. Infatti calcolata la pulsazione della cosinusoide involuppo (cosinusoide che contiene al suo interno la curva) :

$$\Omega = \frac{\Delta\omega}{2} = 2\pi F \quad 5.13$$

$$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{4\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{4\pi} = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad 5.14$$

$$T = \frac{1}{F} = \frac{2}{f_1 - f_2} \quad 5.15$$

Analizzando la 5.15 si nota che, più  $f_1$  risulta prossima ad  $f_2$ , più i nodi del grafico di fig. 2 risultano lontani fra di loro. Al limite se  $f_1$  risultasse uguale ad  $f_2$   $T$  tenderebbe ad infinito.

### Il circuito di misura

Il circuito di fig. 2 per ragioni tecniche non può essere realizzato: infatti i generatori di funzione da laboratorio e gli oscilloscopi generalmente hanno lo 0 volt connesso al circuito di terra; il collegamento di fig. 2 metterebbe quindi in corto uno dei due generatori. Si realizza quindi il circuito di fig. 3 nel quale i due generatori e l'oscilloscopio hanno lo 0 volt equipotenziale (e ciò elimina ogni problema). In sintesi il circuito trasforma i due generatori di tensione in generatori di corrente ( $R \gg R_3$ ) infatti applicando il teorema di Norton al circuito di fig. 3 si ottiene quello di fig. 4 dove si ha :

$$I_1 = \frac{v_1}{R} \quad I_2 = \frac{v_2}{R} \quad 5.16$$

tenendo quindi conto che :

$$R \gg R_3 \quad 5.17$$

il circuito di fig. 4 si semplifica in quello di fig. 5 nel quale risulta :

$$v_{AB} = R_3(I_1 + I_2) = \frac{R_3}{R}(v_1 + v_2) \quad 5.18$$

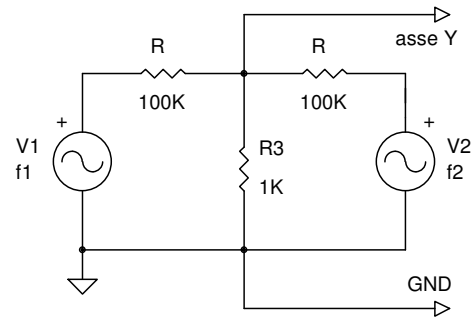


fig. 3 Circuito per esercitazione

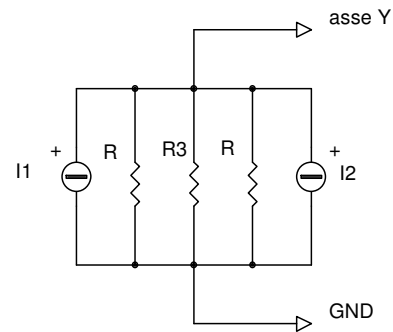


fig. 4 Circuito equivalente a fig. 3

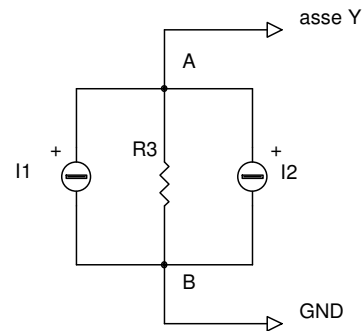


fig. 5

Si osservi che l'espressione 5.18 è formalmente analoga alla 5.3 (a meno di una costante moltiplicativa), pertanto tutte le conclusioni continuano ad essere valide.

### Modalità di svolgimento della misura

Per effettuare la misura sono necessari due generatori di funzione (uno campione ed uno da tarare), la rete di fig. 3 ed un oscilloscopio.

Collegati i vari elementi circuitali e scelta una frequenza di partenza pari a 1 KHz, si procederà a regolare i comandi Amplitude dei generatori di funzione in modo da rendere i due valori massimi uguali; per fare ciò si sconnette  $v_1$  e si effettua la regolazione d'ampiezza su  $v_2$  quindi si sconnette  $v_2$  e si effettua la regolazione d'ampiezza su  $v_1$ .

A questo punto variando molto gradatamente la frequenza del generatore campione ed osservando la forma d'onda sull'oscilloscopio si raggiunge la situazione di battimento (nodi della forma d'onda di fig. 2 più lontani fra loro).

### Modulazione d'intensità dell'asse z

Il metodo di modulazione d'intensità dell'asse z viene usato per effettuare le misure di frequenza attraverso confronto con la frequenza di un generatore campione; tale metodo è applicato quando le frequenze da confrontare sono una multipla dell'altra.

Si premette che per *asse z* di un oscilloscopio si intende un ingresso apposito attraverso il quale si modula l'intensità del fascetto elettronico mediante un segnale elettrico (ad es. un segnale positivo intensifica il fascetto, un segnale negativo ne riduce l'intensità o viceversa).

Facendo riferimento allo schema elettrico di fig. 6 si osservi che all'asse y viene inviata la tensione applicata ad R1 e all'asse x la tensione applicata a C1 tali tensioni com'è noto risultano fra di loro sfasate di 90° sullo schermo

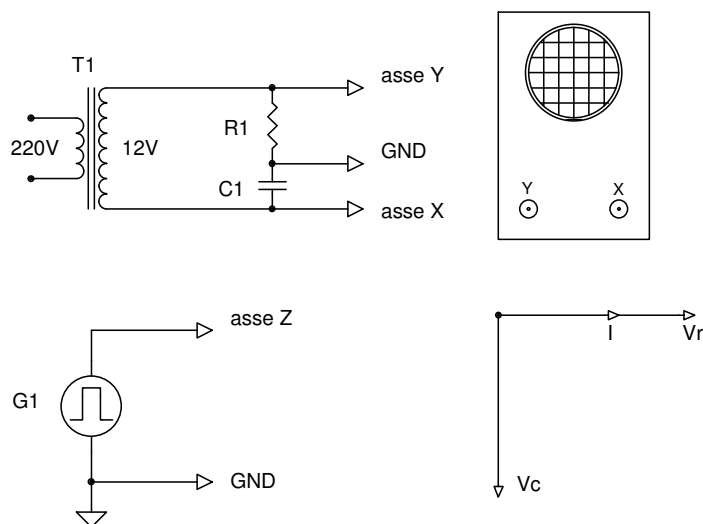


fig. 6 Circuito per prova con asse z

dell'oscilloscopio apparirà una circonferenza (fig. 7) se si avrà cura di rendere le due ampiezze eguali (attraverso le regolazioni fini presenti sugli attenuatori di ingresso). Tale circonferenza verrà disegnata in un tempo T pari al periodo della tensione di rete (20 ms). Se contemporaneamente si invia un segnale all'asse z, l'intensità luminosa risulterà modulata; con ampiezza sufficientemente elevata si potrà avere una riduzione dell'intensità luminosa tale da interdire il fascetto elettronico. Un tipo di immagine che può apparire è quella di fig. 8; in tal caso la circonferenza viene suddivisa in quattro parti appaiono 4 trattini luminosi separati da quattro zone in cui la traccia è completamente sparita. E' facile convincersi che il periodo del segnale applicato all'asse z è rappresentato dall'intervallo che intercorre fra due trattini consecutivi che appaiono sullo schermo per cui risulta :

$$n = \frac{T_C}{T_Z} = \frac{f_Z}{f_C} \tag{5.19}$$

e quindi :

$$f_z = n \cdot f_c \tag{5.20}$$

## Modalità di svolgimento della misura

Per effettuare la misura sono necessari due generatori (uno campione ed uno da tarare), come generatore campione nel caso della fig. 6 si utilizza la rete di distribuzione dell'energia elettrica che è caratterizzata da una frequenza campione pari a 50 Hz. Collegato il circuito come indicato in fig. 6 si procederà a regolare le ampiezze dei segnali in modo che siano approssimativamente uguali e che consentano alla circonferenza di occupare possibilmente l'intero schermo dell'oscilloscopio. A questo punto variando molto gradatamente la frequenza del generatore applicato all'asse z ed osservando l'immagine che appare sullo schermo quando tale immagine risulta praticamente ferma risulta valida la relazione 5.20 dalla quale nota  $f_c$  (50Hz) si risale ad  $f_z$ .

E' preferibile usare come generatore per l'asse z un generatore d'onda quadra: in tal caso infatti è più marcata e quindi meglio individuabile la differenza esistente fra trattino illuminato e trattino non illuminato.

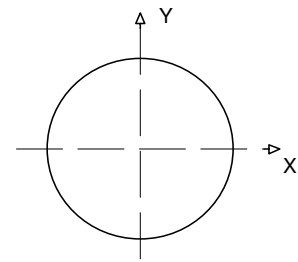


fig. 7 figura sullo schermo

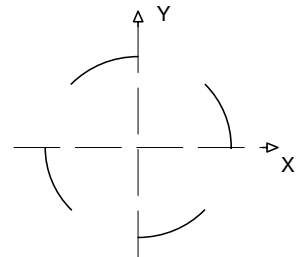


fig. 8 immagine modulata

## Metodo delle figure di Lissajous

Il metodo delle figure di Lissajous viene usato per effettuare la misura di frequenza di una sorgente alternata sinusoidale attraverso confronto con un generatore campione; tale metodo è applicato quando le frequenze da confrontare stanno fra di loro in rapporto razionale.

### Premesse di carattere teorico

Si supponga di applicare ai due assi x ed y di un oscilloscopio due tensioni alternate e sinusoidali di ampiezza diversa e frequenza diversa.

$$v_x = V_{XM} \sin \omega_x t \quad 5.21$$

$$v_y = V_{YM} \sin \omega_y t \quad 5.22$$

La curva che appare sullo schermo dell'oscilloscopio sicuramente risulta contenuta in un rettangolo delimitato dalle rette :

$$y = \pm V_{YM} \quad \text{parallele all'asse x} \quad 5.23$$

e dalle rette :

$$x = \pm V_{XM} \quad \text{parallele all'asse y} \quad 5.24$$

Il segnale applicato all'asse x provoca lo spostamento del fascetto elettronico in senso orizzontale, in un periodo  $T_x$  il fascetto tocca una volta le due rette parallele all'asse y. Il segnale applicato all'asse y provoca lo spostamento del fascetto elettronico in senso verticale, in un periodo  $T_y$  il fascetto tocca una volta le due rette parallele all'asse x. Se consideriamo un generico intervallo di tempo T per effetto della sovrapposizione degli effetti dovuta ai due distinti moti il fascetto elettronico presenterà tangenze sia con assi paralleli all'asse x che con assi paralleli ad y. Indicato perciò con  $n_y$  il numero di tangenze con rette parallele all'asse verticale e con  $n_x$  il numero di tangenze con rette parallele all'asse orizzontale risulta :

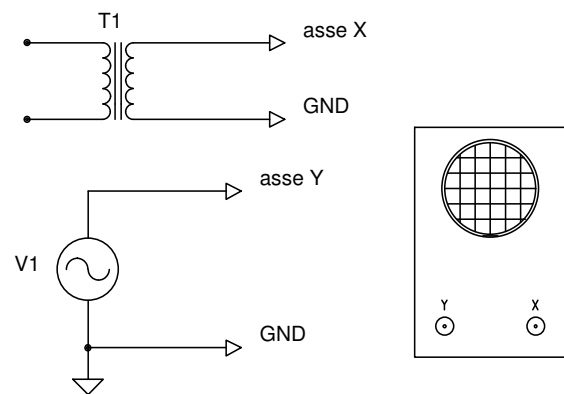


fig. 9

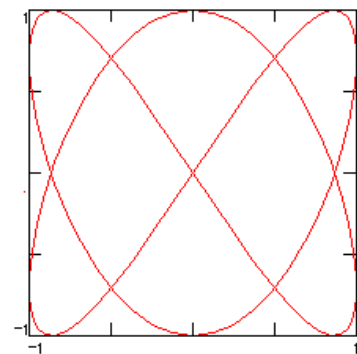


fig. 10

$$n_y = \frac{T}{T_x} = T \cdot f_x \quad 5.25$$

$$n_x = \frac{T}{T_y} = T \cdot f_y \quad 5.26$$

facendo rapporto membro a membro fra la 5.25 e la 5.26 si ha :

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{T_x}{T_y} = \frac{f_y}{f_x} \quad 5.27$$

In fig. 10 è riportato un possibile esempio di figura di Lissajous; in questo caso il rapporto fra le due frequenze assume il valore :

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y} = \frac{3}{2} \quad 5.28$$

In fig. 11 è riportato un altro esempio di figura di Lissajous; in questo caso il rapporto fra le due frequenze assume il valore :

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y} = \frac{1}{2} \quad 5.29$$

In fig. 12 è riportato un altro esempio di figura di Lissajous; in questo caso il rapporto fra le due frequenze assume il valore :

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y} = \frac{5}{3} \quad 5.29b$$

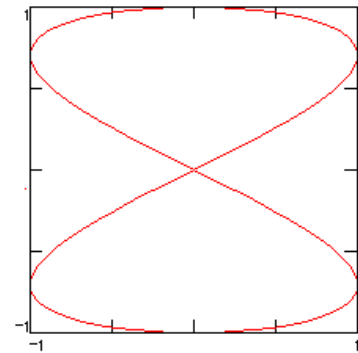


fig. 11

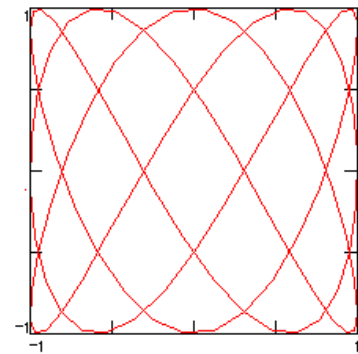


fig. 12

### Modalità di svolgimento della misura

Per effettuare la misura sono necessari due generatori (uno campione ed uno da tarare), come generatore campione nel caso della fig. 9 si utilizza la rete di distribuzione dell'energia elettrica che è caratterizzata da una frequenza campione pari a 50 Hz.

Collegati i due generatori come indicato in fig. 9 si procederà a regolare le ampiezze dei segnali in modo che siano approssimativamente uguali e che consentano all'immagine di occupare possibilmente l'intero schermo dell'oscilloscopio.

A questo punto variando molto gradatamente la frequenza del generatore applicato all'asse y ed osservando l'immagine che appare sullo schermo quando tale immagine risulta praticamente ferma risulta valida la relazione 5.27 dalla quale nota  $f_x$  (50Hz) si risale ad  $f_y$ .

### Misura di sfasamento all'oscilloscopio

Il metodo delle figure di Lissajous viene anche usato per effettuare la misura di sfasamento esistente fra due segnali alternati e sinusoidali isofrequenziali.

### Premesse di carattere teorico

Con riferimento al circuito riportato in fig. 13 si supponga di inviare all'asse x ed y di un oscilloscopio i seguenti segnali:

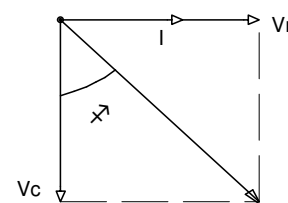
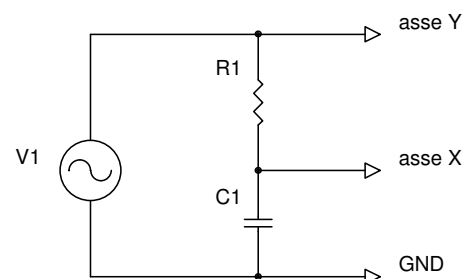


fig. 13

$$v_x = X_M \sin \omega t \quad 5.30$$

$$v_y = Y_M \sin(\omega t + \varphi) \quad 5.31$$

L'immagine che appare sullo schermo dell'oscilloscopio è una ellisse con asse focale inclinato come rappresentato in fig. 14. Individuiamo di questa ellisse la intersezione con il semiasse positivo y ponendo:

$$\omega t = 0 \quad 5.32$$

da cui

$$v_x = 0 \quad Y_0 = Y_M \sin \varphi \quad 5.33$$

Risolviendo la 5.33 rispetto a  $\sin \varphi$  si ha :

$$\sin \varphi = \frac{Y_0}{Y_M} \quad 5.34$$

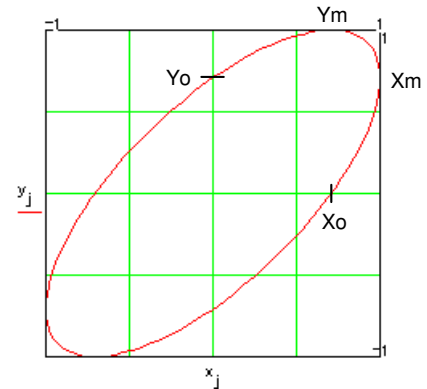


fig. 14

### Modalità di svolgimento della misura

Per effettuare la misura è necessario un generatore di funzione, l'oscilloscopio e la rete elettrica di fig. 13. Realizzato il circuito come indicato in fig. 13 si procederà a regolare le ampiezze dei segnali in modo che l'immagine occupi possibilmente l'intero schermo dell'oscilloscopio.

A questo punto variando la frequenza del generatore si effettueranno le misure su  $Y_0$  e  $Y_M$  e quindi si applicherà la formula 5.34 per risalire all'angolo di sfasamento esistente fra i due segnali.

### Misura di Mutua Induttanza

Il concetto di Mutua Induzione si riferisce a circuiti elettrici fra di loro isolati che risultano magneticamente accoppiati. Quando si considerano due circuiti mutuamente accoppiati e' obbligatorio indicare oltre alla convenzione di segno per V e I anche quella per il flusso  $\Phi$ . La convenzione e' rappresentata da un "pallino" collocato in prossimita' di uno dei due conduttori che fanno capo all'induttanza. Si conviene di ritenere positivo il flusso magnetico prodotto da correnti entranti dal lato contrassegnato dal "pallino".

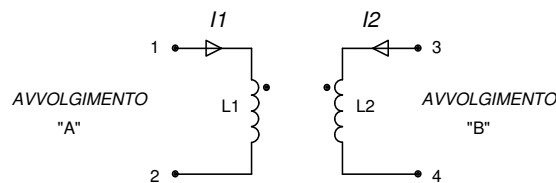


fig. 15 Mutua Induzione fra due circuiti

Si consideri il circuito di fig. 1 in esso risulta :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 \quad \text{flusso di autoinduzione prodotto dalla corrente } I_1 \text{ sull'avvolgimento A}$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 \quad \text{flusso di autoinduzione prodotto dalla corrente } I_2 \text{ sull'avvolgimento B}$$

$$\Phi_{12} = M I_2 \quad \text{flusso di mutua induzione prodotto dalla corrente } I_2 \text{ sull'avvolgimento A}$$

$$\Phi_{21} = M I_1 \quad \text{flusso di mutua induzione prodotto dalla corrente } I_1 \text{ sull'avvolgimento B}$$

Pertanto si avra':

$$\Phi_A = \Phi_1 + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2 \quad 5.35$$

$$\Phi_B = \Phi_2 + \Phi_{21} = L_2 I_2 + M I_1 \quad 5.36$$

Ci poniamo ora il problema di misurare M che ovviamente essendo un coefficiente di proporzionalita' fra flusso  $\Phi$  e intensita' di corrente I si misurera' ovviamente in Henry.

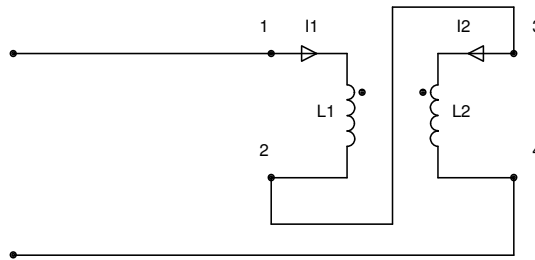


fig. 16 Connessione serie flussi concordi

Nel circuito di fig. 16 i due avvolgimenti sono stati connessi in serie (2 con 3) in modo tale da realizzare la condizione di "flussi concordi"; risulta quindi che :

$$I_2 = I_1 \quad 5.37$$

$$\Phi_{T1} = \Phi_A + \Phi_B = I_1(L_1 + L_2 + 2M) \quad 5.38$$

$$L_C = \frac{\Phi_{T1}}{I_1} = (L_1 + L_2 + 2M) \quad 5.39$$

$L_C$  rappresenta il valore di induttanza misurato fra i morsetti 1 e 4 del circuito di fig. 16.

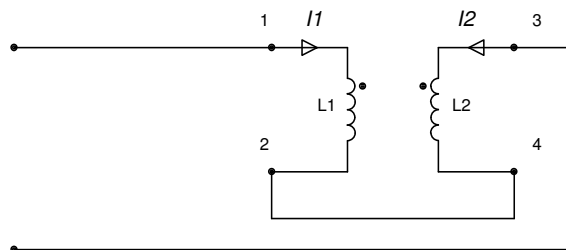


fig. 17 Connessione serie con flussi discordi

Nel circuito di fig. 17 i due avvolgimenti sono stati connessi in serie (2 con 4) in modo tale da realizzare la condizione di "flussi discordi"; risulta quindi che :

$$I_2 = -I_1 \quad 5.40$$

$$\Phi_{T2} = \Phi_A - \Phi_B = I_1(L_1 + L_2 - 2M) \quad 5.41$$

$$L_D = \frac{\Phi_{T2}}{I_1} = (L_1 + L_2 - 2M) \quad 5.42$$

$L_D$  rappresenta il valore di induttanza misurato fra i morsetti 1 e 3 del circuito di fig. 17. Sottraendo membro a membro dalla 5.39 la 5.42 risulta :

$$M = \frac{L_C - L_D}{4} \quad 5.43$$

Sul circuito di fig. 1 possono quindi essere effettuate 4 misure :

- Misura di  $L_1$  fra i morsetti 1 e 2 lasciando aperti 3 e 4.*
- Misura di  $L_2$  fra i morsetti 3 e 4 lasciando aperti 1 e 2.*
- Misura di  $L_C$  fra i morsetti 1 e 4 (vedi fig. 16),*
- Misura di  $L_D$  fra i morsetti 1 e 3 (vedi fig. 17).*

## Considerazioni sul fattore di bontà $Q$

Dicesi fattore di bontà di un componente reattivo il rapporto esistente fra il modulo della potenza reattiva scambiata ed il valore della potenza attiva dissipata.

$$Q = \frac{\text{Potenza reattiva scambiata}}{\text{Potenza attiva dissipata}} \quad 5.44$$

Se la misura di  $L$  viene effettuata utilizzando un ponte in corrente alternata, oltre alla misura di  $L$  il ponte fornisce anche il valore del coefficiente di bontà  $Q$ . È interessante notare che la misura di  $L_c$  fornisce di solito un valore di  $Q$  discretamente più elevato rispetto al valore ricavato dalle misure di  $L_1$ ,  $L_2$  e di  $L_d$ . Il fatto può essere spiegato riferendoci al seguente ragionamento: quando si effettua la misura di  $L_c$  (vedi fig. 16) a numeratore della 5.44 avremo i contributi di potenza reattiva dovuti a  $L_1$ ,  $L_2$  ed  $M$ ; mentre al denominatore figureranno i contributi di potenza attiva che si vengono a produrre in  $L_1$  e  $L_2$ .

Si può dimostrare che il valore massimo teorico del coefficiente di mutua induzione  $M$  è dato dalla relazione:

$$M_{MAX} = \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad 5.45$$

poiché  $M$  risulta:

$$0 < M \leq M_{MAX} \quad 5.46$$

è conveniente porre:

$$M = k \cdot M_{MAX} = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad 5.47$$

ovviamente  $k$ , denominato "coefficiente di accoppiamento" risulta così definito:

$$k = \frac{M}{M_{MAX}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad 5.48$$

$$0 < k \leq 1 \quad 5.49$$

## BIBLIOGRAFIA

Giometti Frasconi

Manuale per il Laboratorio di Misure Elettroniche

Edizioni Calderini

p. 555,556