

### Circuito equivalente di un cristallo di quarzo

Il cristallo di quarzo è un componente elettronico molto usato per realizzare generatori di clock estremamente stabili in frequenza; in tali circuiti la frequenza di oscillazione coincide con quella di risonanza del quarzo. Si ricorda il largo impiego negli orologi al quarzo, come generatore di clock nei PC (clock del processore, RTC real time clock, clock del circuito di refresh delle RAM dinamiche, ecc.). Il circuito equivalente del cristallo è riportato in fig. 1; il simbolo circuitale in fig. 2.

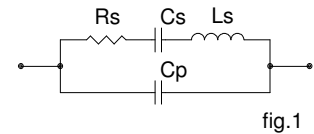


fig.1



fig.2

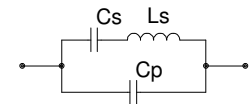


fig.3

*Un cristallo di quarzo appartiene alla categoria materiali "piezoelettrici"; che, in presenza di una sollecitazione di tipo meccanico, si comportano da generatori di fem proporzionale alla sollecitazione. Questa proprietà è sfruttata nei microfoni piezoelettrici, negli accendigas piezoelettrici ma più in generale nei trasduttori piezoelettrici. Il fenomeno della "piezoelettricità" è reversibile ossia applicando una ddp al cristallo questo si deforma meccanicamente; questa proprietà è sfruttata negli altoparlanti piezo-elettrici nei buzzer (cicalini piezoelettrici). La "piezoelettricità" è comune a quasi tutti i cristalli privi di un centro di simmetria (per es.: quarzo, tormalina, topazio, acido tartarico, clorato di sodio).*

Al cristallo di quarzo devono essere saldati i due conduttori (reofori); perchè ciò sia possibile è necessario metallizzare le superfici di contatto; questo processo dà origine alla capacità Cp che compare nel circuito equivalente. La resistenza di perdita Rs presente nel circuito di fig. 1, rappresenta le perdite di potenza attiva che si manifestano nel cristallo tali perdite sono generalmente molto basse (si parla di fattore di bontà del circuito risonante serie che si aggira attorno a valori mediamente superiori a 10.000). In prima approssimazione si può perciò trascurare la presenza di Rs e rifarsi al circuito equivalente semplificato di fig. 3. Nella tabella seguente sono riportati i dati salienti che caratterizzano alcuni quarzi di impiego industriale.

f(Hz)	90K	280K	525K	2M
Rs(###)	15K	1.35K	220	150
Ls(H)	137	27.7	7.8	0.785
Cs(pF)	0.023	0.0117	0.0115	0.00135
Cp(pF)	3.5	6.18	6.3	3.95
f0(Hz)	88700	279568	531403	2000865
ε	5090	36042	118379	65792

Nel circuito di fig. 3 è possibile calcolare l'impedenza del circuito risonante serie Cs-Ls che sarà data dalla espressione:

$$Z_s = j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s} = \frac{1 - \omega^2 L_s C_s}{j\omega C_s} \quad 1.1$$

e quindi l'impedenza complessiva Zt data dall'espressione:

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_s} + j\omega C_p = \frac{j\omega C_s}{1 - \omega^2 L_s C_s} + j\omega C_p = \frac{j\omega [C_s + C_p (1 - \omega^2 L_s C_s)]}{1 - \omega^2 L_s C_s} \quad 1.2$$

$$Z_T = \frac{1 - \omega^2 L_s C_s}{j\omega [C_s + C_p (1 - \omega^2 L_s C_s)]} = -j \frac{1 - \omega^2 L_s C_s}{\omega (C_s + C_p) \left(1 - \omega^2 L_s \frac{C_p \cdot C_s}{C_p + C_s}\right)} \quad 1.3$$

posto:

$$C_E = \frac{C_p \cdot C_s}{C_p + C_s} \quad 1.4$$

la 1.3 assume la seguente forma:

$$Z_T = -j \frac{1 - \omega^2 L_s C_s}{\omega (C_s + C_p) (1 - \omega^2 L_s C_E)} = jX(\omega) \quad 1.5$$

$$X(\omega) = -\frac{1 - \omega^2 L_s C_s}{\omega (C_s + C_p) (1 - \omega^2 L_s C_E)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad 1.6$$

il valore di  $\omega$  per cui  $N(\omega)=0$  rappresenta uno zero della  $X(\omega)$ ; fisicamente tale pulsazione è una pulsazione di risonanza serie. Tale valore è dato dalla espressione:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad 1.7$$

i valori di  $\omega$  per cui  $D(\omega)=0$  rappresentano i poli della  $X(\omega)$ ; fisicamente tali pulsazioni, ove assumano valori diversi da zero, corrispondono a situazioni di risonanza parallelo (antirisonanza). Eguagliando a zero il denominatore si ottiene quindi:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_s C_E}} \quad \omega = 0 \quad 1.8$$

Alla luce delle 1.7 e 1.8 l'espressione 1.6 può essere riscritta nel seguente modo:

$$X(\omega) = -\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{\omega (C_s + C_p) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)} \quad 1.9$$

Ci poniamo l'obiettivo di rappresentare su di un grafico l'andamento di  $X(\omega)$  al variare di  $\omega$ . Innanzitutto dobbiamo osservare che poichè  $C_E$  risulta minore di  $C_s$  la pulsazione di risonanza serie risulterà inferiore alla pulsazione di risonanza parallelo:

$$C_E < C_s \rightarrow \omega_s < \omega_p \quad 1.10$$

Per valori di  $\omega$  prossimi a zero risulta:

$$\omega \cong 0 \rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \cong 1 \quad 1.11$$

$$\omega \cong 0 \rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \cong 1 \quad 1.12$$

l'espressione 1.9 può essere riscritta nel seguente modo:

$$X(\omega) \cong -\frac{1}{\omega (C_s + C_p)} \quad 1.13$$

Nel grafico di fig. 4 è rappresentato l'andamento di  $X(\omega)$  per valori di  $\omega$  prossimi a 0.

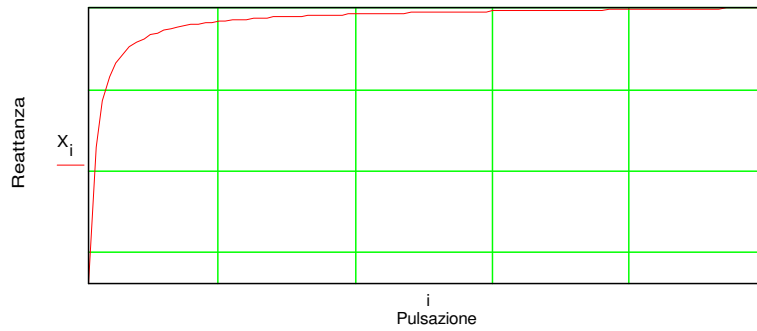


fig. 4 Comportamento a basse frequenze

Al crescere di  $\omega$ , si perviene alla pulsazione di risonanza serie  $\omega_s$  data dalla espressione 1.7. In corrispondenza a tale pulsazione  $X(\omega)$  assume valore nullo; alla pulsazione  $\omega_s$  il ramo  $L_s C_s$  del circuito equivalente di fig. 3 si comporta infatti da corto circuito. Da  $\omega=0$  fino al valore  $\omega_s$  il comportamento del cristallo di quarzo è di tipo capacitivo. Da  $\omega_s$  a  $\omega_p$  (pulsazione di risonanza parallelo data dall'espressione 1.8), il comportamento del circuito è di tipo induttivo, e l'andamento di  $X(\omega)$  è riportato nel grafico di fig. 5. Da  $\omega_p$  in poi il comportamento del cristallo di quarzo diventa nuovamente di tipo capacitivo.

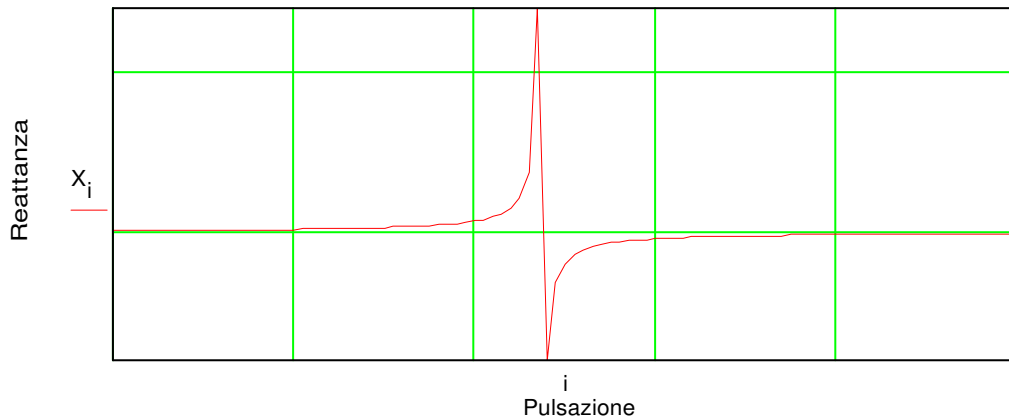


fig. 5 Quarzo in risonanza

In fig. 6 è riprodotta per intero la curva della reattanza e in fig. 7 è riportata la curva della fase dell'impedenza  $Z(j\omega)$  di un cristallo di quarzo.

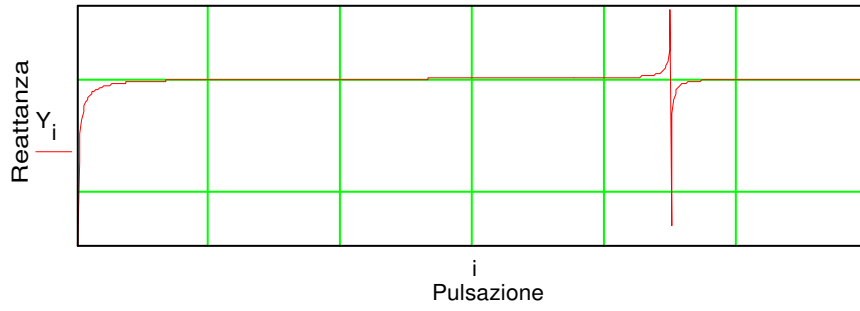


fig. 6 Curva della Reattanza

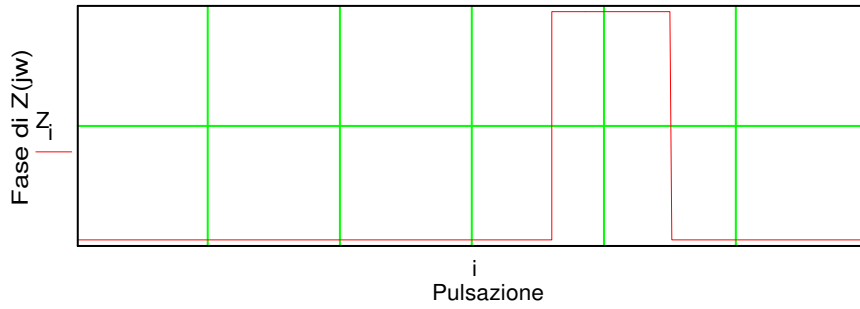


fig. 7 Curva della fase

Bibliografia:

COS/MOS Integrated Circuit Manual RCA pag. 195 e seguenti