Istituto Professionale di Stato per l'Industria e l'Artigianato
MORETTO
Via Luigi Apollonio, 21   BRESCIA

LE SERIE NUMERICHE.

.
a cura di Maggini Michele
.
.

Classe 5DI TIEE

Brescia giugno 1993

NOZIONI PRELIMINARI

SUCCESSIONI:

Dato un insieme numerico qualsiasi ,questo si chiama successione quando esiste una corrispondenza biunivoca tra di esso e l'insieme dei numeri interi positivi.
In pratica si usa indicare gli elementi della successione con i simboli :

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

intendendo con ciò che a_1 è il primo termine della successione ,a_2 il secondo,a_3 il terzo e cos via fino all'ennesimo termine a_n.
Il termine ennesimo a_n è chiamato termine generico della successione.

SUCCESSIONI CONVERGETI,DIVERGENTI e INDETERMINATE:

Presa una successione , questa si dice convergente se al crescere di n il corrispondente termine a_n si avvicina sempre di più ad un numero finito; ciò equivale a dire:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

In altre parole la successione converge al numero l quando, preso un numero ε>0 (abbastanza piccolo),esiste in corrispondenza un intorno H di N tale che:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Una successione invece è divergente quando,al crescere di n,il corrispondente termine a_n ,cresce indefinitamente in valore assoluto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

In altre parole la successione diverge quando;preso un numero E>0 (abbastamza grande),è possibile determinare un termine della successione tale che:

$$|a_n| > E$$

Una successione è indeterminata quando non è possibile determinare il limite al crescere di n.

PROGRESSIONI ARITMETICHE:

Definizione: una successione di numeri

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

è chiamata progressione aritmetica quando è costante la differenza fra due termini consecutivi qualsivoglia della successione;

(1) $a_n - a_{(n-1)} = d$

Tale differenza è chiamata ragione della progressione .
Una progressione aritmetica si dice crescente quando,preso un suo termine qualsivoglia ,il termine dopo risulta essere maggiore;
Ciò equivale a dire che la ragione d risulta maggiore di 0 infatti secondo quanto appena detto:

$a_{(n-1)} < a_n < a_{(n+1)}$

da cui:

$a_{(n-1)} < a_n$

sottraendo $a_{(n-1)}$ ad entrambi i membri della disuguaglianza si ottiene:

$0 < a_n - a_{(n-1)}$

dalla (1):

$d > 0$

Allo stesso modo si dimostra che una progressione aritmetica è decrescente quando $d<0$

CALCOLO DEL TERMINE GENERICO:

Dato il primo termine a_1 di una progressione aritmetica di ragione d si vuole calcolarne il termine generico a_n.
Dalla (1) possiamo scrivere :

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d$
$a_4 = a_3 + d$
.....
.....
.....
$a_n = a_{(n-1)} + d$
.....
.....
.....

Sommando membro a membro le (n-1) uguaglianze si ottiene:

$a_2+a_3+a_4+......+a_n+...=(a_1+d)+(a_2+d)+(a_3+d)+...+(a_{(n-1)}+d)$

cioè:

$a_2+a_3+a_4+......+a_n+...=a_1+a_2+a_3+.....+a_{(n-1)}+d(n-1)$

da cui:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

Una progressione aritmetica è limitata quando è dotata di un numero finito di termini.
Un' ovvia proprietà di questi particolari tipi di progressione è la seguente:

$$a_1+a_n=a_2+a_{(n-1)}=a_3+a_{(n-2)}=.....\text{n volte}$$

e cioè:"in una progressione aritmetica limitata la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini equidistanti da essi."
Si voglia ora calcolare ,dato il primo termine di una progressione aritmetica limitata e la sua ragione d,la somma dei suoi primi n termini:

$$Sn=a_1+a_2+a_3+a_4+....+a_{(n-1)}+a_n$$

ciò equivale a scrivere:

$$Sn=a_n+a_{(n-1)}+.....+a_4+a_3+a_2+a_1$$

Sommando membro a membro le due equazioni appena scritte:

$$2Sn=(a_1+a_n)+(a_2+a_{(n-1)})+(a_3+a_{(n-2)})......\text{n volte}$$

Poichè i termini racchiusi in parentesi presenti nel secondo membro hanno il medesimo valore si ha che:

$$Sn=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Definizione: una successione di numeri

$$a_1,a_2,a_3,.....,a_n,....$$

è chiamata progressione geometrica quando è costante il rapporto tra due termini consecutivi qualsivoglia della successione:

$$(2)\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q$$

Tale rapporto è chiamato ragione della successione geometrica.
Una progressione geometrica si dice crescente quando ,preso un suo termine qualsiasi ,il termine successivo risulta essere maggiore;
Ciò equivale a dire che la ragione q ,risulta maggiore di 1 infatti ,secondo quanto appena detto:

$$a_{(n-1)}<a_n<a_{(n+1)}$$

da cui:

$a_{(n-1)} < a_n$

dividendo per $a_{(n-1)}$ entrambi i membri della disuguaglianza si ottiene:

$$1 < \frac{a_n}{a_{(n-1)}}$$

Allo stesso modo si dimostra che una progressione è decresceste quando 0<q<1

CALCOLO DEL TERMINE GENERICO

Dato il primo termine di una progressione geometrica di ragione q si vuole ora calcolare il termine generico a_n:

Dalla (2) scriviamo:

$a_2=a_1.q$
$a_3=a_2.q$
$a_4=a_3.q$
......
......
......
$a_n=a_{(n-1)}.q$
......
......
......

Moltiplicando membro a membro le (n-1) uguaglianze si ottiene :

$a_2.a_3.a_4....a_n...= (a_1.q)\ (a_2.q)\ (a_3.q)\ ...$

Cioè:

$a_2.a_3.a_4....a_n...= a_1.a_2.a_3.....a_{(n-1)}..q^{n-1}$

da cui :

$a_n = a_1 \, . \, q^{n-1}$

Una progressione geometrica è limitata quando è dotata di un numero finito di termini. Un'ovvia proprietà di questo tipo particolare di progressione è la seguente:

$a_1.a_n = a_2.a_{(n-1)} = a_2.a_{(n-2)} =$ ......n volte

e cioè:

"In una progressione geometrica limitata il prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto dei termini equidistanti dagli estremi."
Si voglia ora calcolare ,dato il primo termine di una progressione geometrica limitata e la sua ragione q, la somma dei suoi primi n termini:

(3) $Sn = a_1+a_2+a_3+......+a_n$

Moltiplicando entrambi i membri per la ragione q si ottiene:

(4) $q.Sn = a_1.q+a_2.q+a_3.q+......+a_{n-1}.q+a_n.q$

Dalla (2) possiamo scrivere:

$a_1.q = a_2 \qquad a_2.q = a_3 \qquad a_3.q = a_4 \qquad a_{(n-1)}.q = a_n$

Quindi :

$$q \cdot a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$$

La relazione (4) diventa:

$q.Sn = a_2+a_3+a_4+....a_n+a_1.q^n$

Sottraendo infine membro a membro la (4) con la (5) e riducendo i termini simili si ottiene:

$(q-1).Sn = a_1.(q^n-1)$

oppure:

$(1-q).Sn = a_1.(1-q^n)$

cioè:

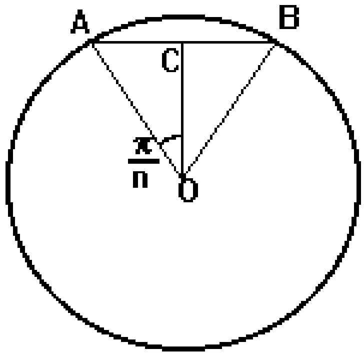
$$Sn = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

APPLICAZIONE DEL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

E' noto che la lunghezza di una circonferenza C di raggio r>0 (rispetto ad una unità u) è pari al numero reale positivo l che si ottiene dalla formula:

$l = 2 \pi r$

Dimostriamo questa formula facendo uso della teoria delle successioni .
Consideriamo una circonferenza C di raggio r e inscriviamo in essa un poligono regolare di n lati , con n>3 . Siano $\overline{AB} = l_n$ e $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{l}$ rispettivamente la lunghezza del lato AB e l' ampiezza dell'angolo al centro ad esso associato:



Detto p_n il perimetro del poligono regolare , si ha :

(1) $p_n = n \cdot l_n$

al variare di n numero naturale , la (1) forma una successione convergente. Infatti , sia C il punto medio di AB ; Considerato il triangolo rettangolo OCA , retto in C , abbiamo :

$$\overline{AC} = \overline{OA} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

ossia:

$$\frac{l_n}{2} = r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

La (1) diventa :

$$p_n = 2n \cdot r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

che esprime la lunghezza del perimetro del generico poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza. Facendo tendere n all' infinito si ha :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} 2n \cdot r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

che può scriversi come segue :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi \cdot r \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \cdot r \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

dalla quale , tenuto presente che l' ultimo limite vale 1 si trova :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 2\pi \cdot r$$

SERIE:

Sia data una successione di numeri :

(1) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$

Si dice serie associata alla successione data e si indica con:

(2) $a_1+a_2+a_3+.....+a_n+...$

la somma dei suoi n termini.

Poichè l'operazione di somma ha significato nel caso di un numero finto di addendi,occorre estendere questa nozione al caso in cui la successione di partenza annoveri infiniti termini: in pratica si pone $S1= a_1$, $S2 = a_1+a_2$, $S3 = a_1+a_2+a_3$ ecc...ricorrendo poi alla nozione di limite quando n tende a infinito.
Più precisamente si dice che la serie (2) è convergente quando :

$$\lim_{n\to\infty} Sn = S$$

e il numero S si chiama somma della serie (2).
Se invece accade che :

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \pm\infty$$

si dice che la serie è divergente.
Nel caso in cui non si verificasse nessuno dei due precedenti casi si dice che la serie è indeterminata.
Data una successione :

$a_1,a_2,......,a_n,...$

dotata di infiniti termini, la somma :

$a_1+a_2+......+a_n$

si chiama ridotta della serie.

PROPRIETA' DELLE SERIE CONVERGENTI:

Data una serie convergente:

(1) $a_1+a_2+a_3+.....+a_n+.....$

e di somma S, la serie

(2) $Ka_1+Ka_2+Ka_3+.....+Ka_n+.....$

è anch' essa convergente e di somma KS.
Analogamente se la serie (1) diverge o è indeterminata, anche la serie (2) diverge o è indeterminata .

Se la serie (1) converge allora :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

infatti essendo:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = S \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

ed essendo:

$$a_n = S_n - S_{(n-1)}$$

si ha che :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{(n-1)} = S - S = 0$$

E' comunque importante dire che la condizione appena esposta è necessaria ma non sufficiente per quanto riguarda la convergenza di una serie.
Ne è un esempio la serie armonica :

$$1+1/2+1/3+1/4+.......+1/n+.....$$

che è divergente ma il limite del suo termine generico per n che tende a infinito è 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

La serie armonica , essendo divergente , ha scarso interesse nella pratica,mentre assune un ruolo fondamentale nella teoria. Infatti , in molti casi essa viene presa come termine di confronto per decidere serie.

RESTO DI UNA SERIE

Data una serie

(1) $a_1+a_2+a_3+...a_n+....$

e un numero intero positivo p qualsiasi si chiama resto p-esimo della serie e si indica con :

(2) $a_{(p+1)}+a_{(p+2)}+a_{(p+3)}+.......$

la somma che si ottiene sopprimendo i primi p termini della serie di partenza.
Si vede subito che :

$$S=Sp+Rp$$

dove Sp indica la ridotta di posto p-esimo della serie S.
A tale proposito sussiste il seguente teorema :
"Se la serie (1) è convergente lo è pure la serie (2) per qualunque p; reciprocamente se la serie (1) diverge oppure è indeterminata anche la (2) diverge o è indeterminata."

Inoltre si dimostra che se la serie (1) converge allora :

$$\lim_{n\to\infty} Rp = 0$$

Infatti per ipotesi la serie (1) converge e ha somma S quindi anche la serie (2) è convergente (per il teorema precedente) ed ha somma Rp data da :

$$Rp=S-Sp$$

Passando al limite in questa uguaglianza per $p\rightarrow\infty$ si ha:

$$\lim_{p\to\infty} Rp = 0$$

SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

Sia $a_1+a_2+a_3+.....+a_n+....$

una serie numerica per cui $a_n\geq 0$ per ogni $n\in N^+$; risulta che:

$$Sn=S(n-1)+a_n$$

Essendo $a_n\geq 0$ la successione delle somme parziali (S1,S2,S3,....) risulta monotòna e non decrescente; da ciò risulta subito il seguente teorema :
"Una serie a termini non negativi o converge o diverge ."

Per le serie a termini costanti sussiste il seguente teorema detto anche criterio del confronto o di Gauss:

"Siano $a_1+a_2+a_3+...a_n+....$
e $b_1+b_2+b_3+.......+b_n+...$

due serie a termini non negativi tali che per ogni n sia $b_n\leq a_n$ (in questo caso si dice che la prima serie
è maggiorante della seconda); allora se la prima è convergente lo è anche la seconda; se la seconda è
divergente lo è anche la prima."

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Una serie si dice a termini di segno alterno se i suoi termini di posto pari sono tutti positivi e se i suoi termini di posto dispari sono tutti negativi o viceversa.
In simboli :

$$a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{(n-1)}a_n+....$$

dove $a_n>0$ per ogni n oppure $a_n<0$ per ogni n.

Sussiste il seguente teorema :
"Una serie di segno alterno è convergente se i suoi termini ,presi in valore assoluto,non crescono e se : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$."

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Prendiamo una serie

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

a termini qualunque e costruiamo una serie i cui termini sono quelli della serie (1) presi in valore assoluto:

(2) $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$

La serie (2) è chiaramente maggiorante della serie (1) per cui se la (2) converge anche la (1) converge .

Diamo ora la seguente definizione :
"Una serie si dice assolutamente convergente se è convergente la serie formata dai suoi termini presi in valore assoluto."

Una serie convergente per la quale la serie dei suoi termini presi in valore assoluto non converge si dice semplicemente convergente .
A tale proposito sussiste il seguente teorema (criterio di Cauchy):

".La serie $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$è assolutamente convergente se esiste il limite :

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = l$ e l<1

non è convergente se l>1 e nulla si può dire sul carattere della serie se l=1".

Sussiste inoltre il seguente teorema (il teorema di D'Alembert):
".Sia data una serie $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ a termini di segno qualunque tale che a_n sia diverso da 0 per ogni n, se esiste il

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

la serie in esame è assolutamente convergente se l<1 mentre è divergente se l>1 e nulla si può dire se l=1."

SERIE DI POTENZE

Consideriamo una successione di funzioni definite in un certo intervallo (a,b) della retta reale,e prendiamo in esame la serie:

$$(A) f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+.......+f_n(x)+...$$

Fissato un valore x_0 appartenente ad (a,b) ogni funzione assume ,per $x = x_0$,un determinato valore,quindi la serie (A) diviene una serie numerica :

$$(B) f_1(x_0)+f_2(x_0)+.........+f_n(x_0)+....$$

A tale proposito diamo la seguente definizione:

"Si dice che la serie di funzioni (A) è convergente (divergente o indeterminata)nel punto xo se risulta convergente (divergente o indeterminata) la serie (B) ".

Consideriamo ora la serie di funzioni:

$$(C)\ a_0+a_1(x)+a_2(x)^2+.....+a_n(x)^n+......$$

detta serie di potenze .
Questa serie può convergere per qualsiasi valore della x cioè, ha come campo di convergenza tutto R;oppure può convergere solo per x=0 ; oppure può convergere oltre che per x=0 anche per altri valori di x .
A tale proposito diciamo che:
"Se la serie (C) converge solo per alcuni valori dell'asse reale (x) allora esiste sempre un intorno (-R, R) dello zero tale che ,per ogni x $\in$ (-R,R) la serie converge sempre ;Tale intervallo si chiama intervallo di convergenza ed i suoi estremi "Raggio di convergenza".
Per i valori esterni al suddetto intervallo la serie diverge mentre nulla si può dire per quelli estremi (-R, R).

CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA

Sia :

$$(D)\ a_0+a_1(x)+a_2(x)^2+.....+a_n(x)^n+......$$

una serie di potenze i cui termini sono tutti diversi da 0 e il cui limite :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

allora la serie (D) ha come raggio di convergenza 0 se $\lambda = \propto$, viceversa vale $\propto$ se $\lambda = 0$; ed infine vale il rapporto $\frac{1}{\lambda}$ se non si verifica nessuno dei due casi.

SERIE DI MAC-LAURIN

Prendiamo ora in considerazione la serie di potenze i cui coefficienti siano dati dalla legge:

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^n(0)}{n!}, ...$$

dove f(x) è una funzione definita in un intorno H dello 0 e ammette derivate di qualsiasi ordine nel suddetto intorno; cioè:

$$f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n + ...$$

Chiaramente è una serie di potenze che può convergere per valori di x diversi dallo 0 e , se così fosse, la serie avrebbe come campo di convergenza un intervallo i cui estremi sarebbero equidistanti dallo 0.
Se per ogni x dell'intervallo di convergenza la somma della serie è proprio f(x) allora si dice che la funzione f(x) è sviluppabile in serie di Mac-Laurin.

Una condizione solo sufficiente affinchè una funzione possa essere sviluppata in serie di Mac-Laurin
è la seguente:
Se una funzione f(x) avente come campo di esistenza un intorno H dello 0 è indefinitamente derivabile nel suddetto intervallo , e se esiste un numero positivo k in modo che per ogni x di H e per ogni indice n si abbia :

$$\left| f^n(x) \right| \le k$$

allora la serie di Mac-Laurin costruita con f(x),è convergente per ogni x di H e ha per somma f(x).
Cioè:

$$\text{(E)} \quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n + ...$$

A tale proposito consideriamo la funzione f(x)=senx le cui derivate successive sono comprese nell'intervallo [-1,1].

Abbiamo che :

f '(x) = cosx   f ''(x) = -senx   f '''(x) = -cosx ....

f (0) = 0   f '(0) = 1   f ''(0) = 0   f '''(0) = -1...........

Sostituendo questi valori nella (E) otteniamo la serie di Mac-Laurin relativa a senx:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Allo stesso modo si dimostra che le serie di Mac-Laurin relative alle funzioni cosx e e^x sono rispettivamente :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Nel caso di e^x le x vanno però prese nell'intervallo [-r,r] affinchè risultino equilimitate le sue derivate e possa essere applicato il teorema precedente; infatti per ogni x appartenente a [-r,r] si ha :

$$\left| f^n(x) \right| = e^x \le e^r$$

SERIE DI TAYLOR

Una serie di potenze può avere come punto iniziale un valore diverso dallo 0 ossia ,dalla (D) ,in simboli:

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+.....+a_n(x-x_0)^n +......$$

A tale scopo la serie di Mac-Laurin relativa ad una serie di potenze a punto iniziale diverso dallo 0 ,sarà:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \ldots$$

Questa serie viene detta serie di Taylor relativa alla funzione f(x) e al punto iniziale x_0. Ovviamente, questa formula risulta essere più scomoda rispetto a quella di Mac-Laurin e quindi verrà utilizzata solo se la funzione non è definita nel punto $x_0 = 0$.

BIBLIOGRAFIA

R. Ferrauto -NUOVI COMPLEMENTI DI MATEMATICA-Società Editrice Dante Alighieri

P.Foresti P. Pepe - ANALISI MATEMATICA E NUMERICA -Sansoni per la Scuola

G. Zwirner- COMPLEMENTI DI MATEMATICA