Istituto Professionale di Stato per l'Industria e l'Artigianato
MORETTO
Via Luigi Apollonio, 21 BRESCIA

Il calcolo differenziale:

Matematica: Teoremi fondamentali
Elettronica: Circuiti applicativi

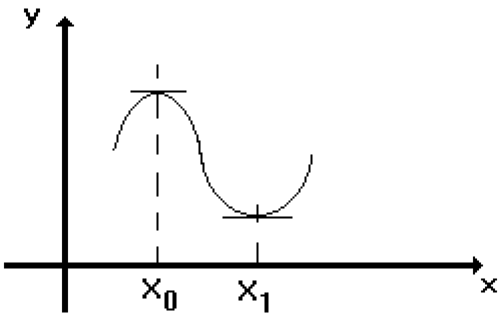
a cura di
Michele Franzoni

della classe 5EI

Brescia giugno 1993

INTRODUZIONE

Furono principalmente NEWTON e LEIBNITZ a sviluppare, indipendentemente l'uno dall'altro, i concetti fondamentali del calcolo integrale; in questo modo trovarono facile soluzione problemi fino ad allora insormontabili.
I due matematici riuscirono a fondere il calcolo integrale con il secondo grande ramo dell'analisi, il calcolo differenziale e questa fu in gran parte la ragione dei loro successi.
Il concetto fondamentale del calcolo differenziale e' quello di derivata. Come l'integrale, anche il concetto di derivata ha le sue origini in un problema geometrico, il problema di trovare la tangente a un punto di una curva.
Tuttavia a differenza dell'integrale, il concetto di derivata fu sviluppato piu' tardi nella storia della matematica.
Esso fu formulato solo verso la fine del diciottesimo secolo, quando il matematico francese PIERRE FERMAT cerco' di determinare i valori massimo e minimo di certe funzioni.



Osservando la figura a lato e' facile comprendere l'idea di FERMAT il quale osservo' che in certi punti, in corrispondenza dei quali la funzione assume i valori di massimo o di minimo, come quelli indicati in figura con le ascisse X0 e X1, la retta tangente e' orizzontale.
Sebbene la derivata sia stata originariamente formulata per studiare il problema delle tangenti, si scopri' ben presto che permetteva anche di calcolare la velocita' e, piu' in generale, il tasso di variazione di una funzione.
Il calcolo differenziale si fonda su alcuni importanti teoremi che permettono di risolvere alcune fondamentali questioni:

a)Determinare il legame tra la derivata di una funzione e monotonia, e quindi invertibilita' della funzione stessa (Teorema di LAGRANGE).
b) Utilizzare regole per calcolare il limite di funzioni nel caso di forme indeterminate (Regole di De L'Hopital).
c) Approssimare una funzione mediante un polinomio di grado determinato e assegnare l'ordine di grandezza dell'errore che si commette con questa approssimazione (Formula di TAYLOR).

Vediamo ora di analizzare e dimostrare singolarmente i teoremi di ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY e TAYLOR.

TEOREMA DI ROLLE

Sia f(x) una funzione, continua nell'intervallo chiuso [a, b] e derivabile nei punti interni di questo intervallo, la quale assume valori eguali negli estremi dell'intervallo, cioè tale che sia:

$$f(a) = f(b)$$

In tali ipotesi esiste almeno un punto C, interno all'intervallo [a, b], nel quale la derivata della funzione si annulla; risulta cioè':

$$f'(c) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Siccome per ipotesi la f(x) e' continua nell'intervallo chiuso [a, b], essa per il teorema di WEIERTRASS e' ivi dotata del massimo M e del minimo m, e inoltre

$$m \leq M$$

Si possono presentare allora due casi a seconda che risulti m=M oppure m<M.
1° CASO- Se e' m=M, la funzione f(x) e' costante in tutto l'intervallo [a, b] e percio' la sua derivata e' nulla in ogni punto dell'intervallo, e il teorema, in questo caso e' dimostrato.
2° CASO- Sia m<M e indichiamo con C e D due punti dell'intervallo [a, b] in cui risulta rispettivamente, f(c)=M e f(d)=m. Dal fatto che e': m<M, segue che f(x) non e' costante in [a, b] e dato che per ipotesi e' f(a)=f(b), siamo sicuri che almeno uno dei punti C e D dovra' certamente cadere all'interno dell'intervallo [a, b].Sia tanto per fissare le idee , C il punto che cade nell'intervallo.allora, detto h un numero positivo scelto in modo che i punti C-h e C+h, cadono in [a, b], dato che in C la funzione assume il suo massimo valore, si ha:

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$
$$f(c-h) - f(c) \leq 0$$

Dividendo la prima disuguaglianza per h e la seconda per -h si ottiene:

(2) $$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

(3) $$\frac{f(c-h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Si osservi ora che il rapporto (2) non e' altro che il rapporto incrementale destro della f(x) relativo al punto C e all'incremento h, mentre il rapporto (3) e' il rapporto incrementale sinistro relativo allo stesso punto. Siccome per ipotesi la f(x) e' derivabile nel punto C, allora i limiti, per $h \to 0$ dei due rapporti incrementali (2) e (3) esistono, sono finiti ed eguali fra loro; precisamente il valore comune dei limiti dei due rapporti (2) e (3), vale f'(c). Passando al limite per $h \to 0$ nella (2), si ha:

(4) $$f'(c) \leq 0$$

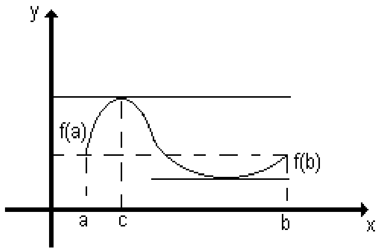
mentre passando al limite per $h \to 0$ nella (3), si ha:

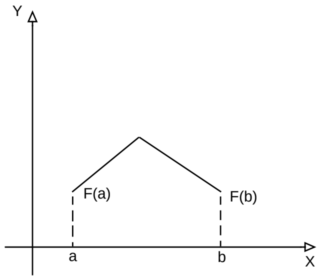
(5) $$f'(c) \geq 0$$

Dalla (4) segue che f'(c) non puo' essere un numero positivo, mentre dalla (5) segue che f'(c) non puo' essere un numero negativo. Pertanto e': $f'(c) = 0$.
Analogamente si ragiona e si conclude se internamente all'intervallo [a, b] cade invece il punto di minimo D, e con cio' il teorema e' dimostrato.

OSSERVAZIONE

Geometricamente il teorema di ROLLE si interpreta dicendo:
Se un arco di curva continua e' dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al piu' gli estremi, ed ha eguali le ordinate degli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco dove la tangente e' parallela all'asse x.





Questo risultato e' del tutto intuitivo; si noti pero' che cio' non avvera', in generale, se manca la derivata in qualche punto interno ad [a, b], ad esempio, in qualche punto angoloso (vedi figura).

ESERCIZI SUL TEOREMA DI ROLLE

1) Dire se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di ROLLE, nell'intervallo a fianco indicato, e, in caso affermativo, determinare l'ascissa C del punto (o dei punti) che verificano il suddetto teorema.

a) $f(x) = x - x^3$ [-1, 0] e [0, 1]

La funzione e' continua e derivabile per ogni valore di x; inoltre f(-1) = f(0) = f(1) = 0. Quindi si puo' applicare il teorema di ROLLE negli intervalli. Per determinare C, formiamo l'equazione

$$f'(x) = 1 - 3 \cdot x^2$$

da cui $1 - 3 \cdot x^2 = 0$

$C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $C_1 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ -1 < C1 < 0 e 0 < C2 < 1

b) $f(x) = \sqrt[3]{8 \cdot x - x^2}$ [0, 8]

La funzione e' continua in [0, 8] e possiede la derivata:

$$f'(x) = \frac{8 - 2 \cdot x}{3 \cdot \sqrt[3]{(8 \cdot x - x^2)}} \qquad \text{per} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 8$$

cioe' e' derivabile nell'intervallo aperto (0, 8).
Inoltre $f(0) = f(8) = 0$. Cosi' il teorema di ROLLE e' verificato nell' intervallo [0, 8] e da $f(0) = 0$ segue C = 4 .

c) $f(x) = 1 - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ [-1, 1]

La funzione e' continua nell'intervallo [-1, 1] inoltre:

$$f(-1) = f(1) = 0$$

Due condizioni sono cosi' verificate.

La derivata $f'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

esiste in ogni punto, eccetto che per x = 0. Poiche' questo punto e' interno all'intervallo [-1, 1], la terza condizione non e' verificata e quindi il teorema di ROLLE non e' applicabile alla funzione data.

d) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ $\left[\frac{\pi}{6} \div \frac{5 \cdot \pi}{6}\right]$

La funzione e' continua nell'intervallo e la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = ctgx$$

esiste per ogni valore interno a tale intervallo.

Da $ctgx = 0$ segue $C = \frac{\pi}{2}$

TEOREMA DI CAUCHY O DEGLI INCREMENTI FINITI

Siano date due funzioni $y = f(x)$ e $z = g(x)$ entrambe derivabili nell'intervallo (a, b) e negli estremi a , b almeno continue; inoltre la funzione g(x) ammetta derivata diversa da 0 in tutti i punti dell'intervallo (a, b); esiste allora almeno un punto C interno all'intervallo nel quale si verifica che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Il teorema si dice anche degli incrementi finiti, perche' esso esprime che, se due funzioni soddisfano alle ipotesi sopra indicate, il rapporto tra gli incrementi delle due funzioni relativi all'intervallo considerato uguaglia il rapporto tra le loro derivate calcolate in un opportuno punto interno all'intervallo. Per la dimostrazione consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - k \cdot g(x)$$

dove k e', per il momento una costante arbitraria. La funzione $F(x)$ risulta, per le ipotesi fatte, continua in [a, b] e derivabile in (a, b); determiniamo ora k in modo che sia

$$F(a) = F(b) \quad \text{cioe'} \quad f(a) - k \cdot g(a) = f(b) - k \cdot g(b)$$

da cui risulta:

(1) $$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

N.B.

E' sicuramente $g(a) \neq g(b)$; infatti se fosse $g(b) = g(a)$,

esisterebbe, per il teorema di ROLLE, almeno un punto x interno ad (a, b) in cui $g'(x) = 0$ e cio' sarebbe contro l'ipotesi.

Per tale valore di k la funzione $F(x)$ assume valori uguali agli estremi dell'intervallo e, pertanto, si puo' applicare il teorema di ROLLE:

esistera' quindi un punto c appartenente all'intervallo (a, b)

nel quale si avra' $F'(c) = 0$ cioe':

$f'(c) - k \cdot g'(c) = 0$ essendo per ipotesi $g'(c) = 0$ si ha:

(2) $$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dal confronto della (1) con la (2) segue che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ESERCIZI SUL TEOREMA DI CAUCHY

a) Verificare il teorema di CAUCHY per le funzioni:

$f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 1$, $g(x) = 2 \cdot x^2 + 1$ nell'intervallo [1, 3].

Le due funzioni sono continue e derivabili per ogni x appartenente ad R e quindi anche nell'intervallo richiesto. Inoltre per ogni x dell'intervallo [1, 3] risulta $g(x) \neq 0$. Sono quindi verificate le ipotesi del teorema, che e' percio' applicabile nel nostro caso.

Calcoliamo:

$f(1) = 5$; $f(3) = 19$; $g(1) = 3$; $g(3) = 19$

$f'(x) = 2 \cdot x + 3$; $g'(x) = 4 \cdot x$

Esistera' almeno un punto C appartenente all'intervallo [1, 3]
per il quale varra' la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioe':

$$\frac{19-5}{19-3} = \frac{2 \cdot c + 3}{4 \cdot c} \qquad c = \frac{12}{6} = 2$$

Ed e' 2 appartenente all'intervallo.

b) Consideriamo ora le due funzioni:

$y = f(x) = \operatorname{sen} x$ e $y = g(x) = \cos x$ $\left[-\frac{\pi}{2} \div \frac{\pi}{2} \right]$

Esse sono continue nell'intervallo ed anche derivabili; ma g'(x) = -sen x si annulla internamente all'intervallo considerato. Il teorema non e' quindi applicabile. E' interessante vedere pero' che f'(x) = cosx che e' diverso da 0 nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2} \div \frac{\pi}{2} \right]$ si potra' cosi' trovare un punto C dell'intervallo per il quale si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Calcoliamo infatti:

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$f'(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\operatorname{sen} x$

otteniamo cosi': $\quad -\dfrac{sen\,c}{cos\,c} = 0 \quad$ da cui:

$tgc = 0 \qquad \to \qquad$ C = 0

E il punto C = 0 appartiene all'intervallo.

TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALORE MEDIO

Se f(x) e' una funzione continua nell'intervallo chiuso [a, b] e derivabile internamente ad esso, allora esiste un punto C interno ad [a, b] tale che risulti:

(1) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Osservando che il primo membro dell'uguaglianza non e' altro che il rapporto incrementale della funzione f(x) relativo all'intervallo [a, b], allora il teorema puo' enunciarsi anche nel seguente modo, con le stesse ipotesi:

Il rapporto incrementale della funzione f(x) relativo all'intervallo [a, b] e' eguale alla derivata della funzione calcolata in un conveniente punto C, interno all'intervallo [a, b]. Per la dimostrazione formiamo la seguente funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) + k \cdot x$$

dove k e' una costante che determiniamo in modo che la funzione g(x) verifichi la terza condizione del teorema di ROLLE, cioè:

$g(a) = g(b)$, ossia $f(a) + k \cdot a = f(b) + k \cdot b$

da cui risulta:

(2) $$k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ora la g(x), ove si tengano presenti le ipotesi fatte sulla f(x), e' continua nell'intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b), perche' somma di funzioni continue in [a, b] e derivabili in (a,b).
Possiamo percio' applicare alla funzione g(x) nell'intervallo [a,b] il teorema di ROLLE. Esiste quindi un punto C interno all'intervallo per il quale risulta:

$g'(c) = f'(c) + k = 0$ cioe' $f'(c) = -k$

da cui tenendo presente il valore di k dato dalla (2) si ottiene:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

N.B. Una dimostrazione piu' semplice si puo' ottenere considerando il teorema di CAUCHY nel caso particolare di $g(x) = x$; Infatti per il teorema di CAUCHY si ha:

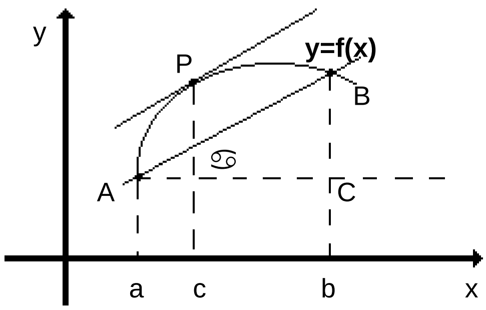
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (3)$$

Ponendo $g(x) = x$ si ottiene $g(b) = b$ e $g(a) = a$ e $g'(x) = 1$; Sostituendo nella (3) quello che abbiamo ottenuto:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ che coincide con la (1)

OSSERVAZIONI

1) L'enunciato del teorema di ROLLE e' un caso particolare di quello di LAGRANGE.
2) Presso alcuni autori, la formula di LAGRANGE viene detta di CAVALIERI, cui risale l'osservazione seguente. Geometricamente il teorema di LAGRANGE si interpreta dicendo : Se un arco di curva continua e' dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al piu' gli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente e' parallela alla corda che congiunge i punti estremi dell'arco.



Si consideri il grafico della funzione f(x) in figura e sia AB l'arco di curva che interessa, cioe' quello compreso nell'intervallo [a, b]. Si conduca la corda AB; possiamo pensare che sull'arco AB si trovi almeno un punto P nel quale la tangente alla curva risulta parallela alla corda AB. Su questa osservazione si basa la giustificazione del teorema enunciato. Si conduca AC parallela all'asse x, allora:

$$\overline{AC} = b - a \quad ,$$

$$\overline{CB} = f(b) - f(a)$$

quindi se si denota con ♋ l'angolo CAB, dal triangolo ACB rettangolo in C, si ha:

$$tg\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

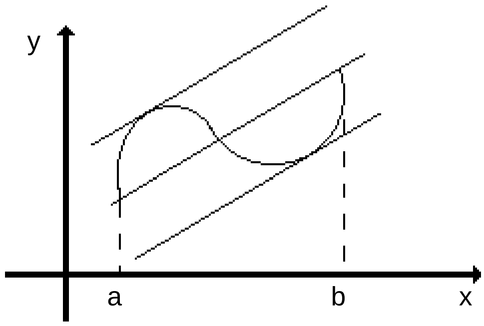
Poiche' la tangente alla curva in P e' parallela alla corda AB, l'angolo a e' anche l'angolo che detta tangente forma con l'asse delle x e percio' tga e' il suo coefficiente angolare. Ne viene che se indichiamo con C l'ascissa del punto P, per il significato geometrico della derivata, sara':

$$tg\alpha = f'(c)$$

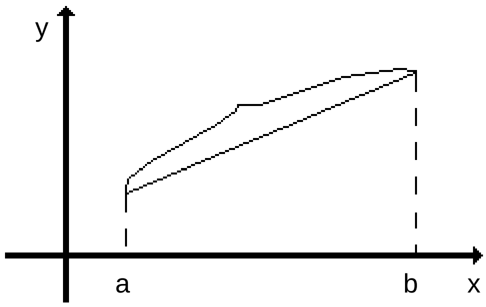
e di conseguenza:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

A proposito del teorema di LAGRANGE, e' quasi superfluo avvertire che dei punti C di cui si parla nell'enunciato, ne esiste sempre almeno uno, ma ne possono esistere benissimo anche piu' di uno, vedi figura:



Se la funzione f(x) di cui si parla nel teorema di LAGRANGE non e' derivabile in un punto interno ad [a, b] allora il teorema puo' non essere vero, come ad esempio in figura:



CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Il teorema di LAGRANGE permette di stabilire importanti legami tra il segno della derivata prima di una funzione e la sua monotonia.

TEOREMA 1°

Se in un intervallo (a, b) la derivata f'(x) di una funzione f(x) e' sempre positiva, allora la funzione e', in [a, b], crescente in senso stretto. Se f'(x) e' sempre negativa, la funzione e' decrescente in senso stretto. Cioè:

$f'(x) > o$ in (a, b) $\rightarrow$ $f(x)$ strettamente crescente in [a, b]

$f'(x) > o$ in (a, b) $\rightarrow$ $f(x)$ strettamente decrescente in [a,b]

Supponiamo, per esempio, che in tutto (a, b) sia $f(x) > 0$, e diciamo X1 e X2 due punti qualunque di [a, b], con X2 > X1. Applicando il teorema di LAGRANGE alla $f(x)$, nell'intervallo [X1,X2], si ha :

$$(1) \qquad \frac{f(X2) - f(X1)}{X2 - X1} = f'(c)$$

con C conveniente punto interno ad [X1, X2]. Essendo per ipotesi $f'(c) > 0$ e X2 > X1 , dalla (1) si deduce $f(X2) > f(X1)$ e cio' provoca che la funzione e' crescente in [a, b].
Analogamente si ragiona essi conclude se in (a, b) e' f'(x) < 0 .

OSSERVAZIONE

Il teorema 1° da condizioni sufficienti ma non necessarie, nel senso che esistono funzioni strettamente crescenti o decrescenti in un intervallo senza che risulti sempre in tale intervallo:

$$f'(x) > 0 \quad \text{oppure} \quad f'(x) < 0$$

Esistono dei criteri di monotonia legati al segno della derivata prima di una funzione, dei quali mi limito a dare l'enunciato essendo la dimostrazione abbastanza difficile.

TEOREMA 2°

Sia $f(x)$ continua in [a, b] e derivabile in (a, b). Condizione necessaria e sufficiente perche' $f(x)$ sia crescente o decrescente in senso lato in [a, b] e' che si abbia:

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad f'(x) \leq 0$$

TEOREMA 3°

Sia $f(x)$ continua in [a, b] e derivabile in (a, b).Condizione necessaria e sufficiente perche' $f(x)$ sia crescente o decrescente in senso stretto e' che si abbia:

1) $f'(x) \geq 0$ *oppure* $f'(x) \leq 0$, *per ogni x appartenente ad (a, b);*

2) Non esista alcun intervallo, incluso in (a, b), in cui sia $f'(x) = 0$.

ESERCIZI SUL TEOREMA DI LAGRANGE

Dire se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di LAGRANGE, nell'intervallo a fianco indicato, e in caso affermativo determinare l'ascissa C del punto (o dei punti) che verifica il suddetto teorema.

a) $f(x) = x^3$ [-1, 1]

La funzione e' continua nell'intervallo chiuso [-1, 1] e derivabile internamente ad esso. Pertanto verifica le ipotesi del teorema Sara' quindi:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \qquad \text{cioe' :} \qquad 3C^2 = 1$$

da cui $c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $f(x) = x - x^3$ [-2, 1]

La funzione e' continua e derivabile per ogni x.

Inoltre $f'(x) = 1 - 3 \cdot x^2$

Percui in base alla formula di LAGRANGE si ha:

$$1 - 3 \cdot c^2 = \frac{0 - 6}{1 + 2} \qquad \text{da cui } C = \pm 1$$

Solo il valore -1 e' accettabile, perche' e' tale che:

$$-2 < c < 1$$

ESERCIZI SULLA MONOTONIA DELLA FUNZIONE

Gli intervalli nei quali una funzione cresce o decresce si dicono intervalli di monotonia di questa funzione. Per determinare tali intervalli si ricorre ai teoremi 1°- 2°- 3° come risulta dal seguente esempio.

c) Determinare in quali intervalli la funzione:

$$y = x^3 - 2 \cdot x^2 + x$$

e' crescente ed in quali e' decrescente.

A tale scopo calcoliamo la derivata della funzione:

$$y' = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$$

Essa si annulla per $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$ e percio' risulta negativa per:

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

e positiva per:

$$x < \frac{1}{3} \quad \text{oppure} \quad x > 1$$

Ne segue che nell'intervallo $\frac{1}{3} < x < 1$, la funzione e' decrescente, mentre nei due intervalli illimitati $x < \frac{1}{3}$ e $x > 1$ $f(x) = e^x$, e' decrescente.

FORMULE DI TAYLOR
APPROSSIMAZIONE DELLE FUNZIONI PER MEZZO DI POLINOMI.

Tra le piu' semplici funzioni che intervengono in analisi, vi sono le funzioni polinomiali. E' molto comodo operare con essi, perche' i loro valori si ottengono eseguendo un numero finito di moltiplicazioni e addizioni. Come vedremo, molte funzioni (quali le funzioni goniometriche, la funzione logaritmo, quella esponenziale) possono essere "approssimate" per mezzo di polinomi. Se la differenza tra la funzione e il suo polinomio approssimato e' sufficientemente piccola, si puo' nella pratica eseguire i calcoli sostituendo la funzione originaria con il polinomio. A seconda dell' uso che si vuol fare dall'approssimazione, sono disponibili molti metodi per approssimare una data funzione per mezzo di polinomi. Vediamo ora di occuparci della determinazione di un polinomio che in un dato punto coincida con la funzione f e le cui derivate ivi coincidano con alcune delle derivate di f. Per ben comprendere quanto diremo, cominciamo con alcune considerazioni di carattere geometrico. Consideriamo una funzione, per esempio quella esponenziale

$$f(x) = e^x$$

Nel punto X = 0, il valore della funzione e di tutte le sue derivate e' 1. Il polinomio di primo grado:

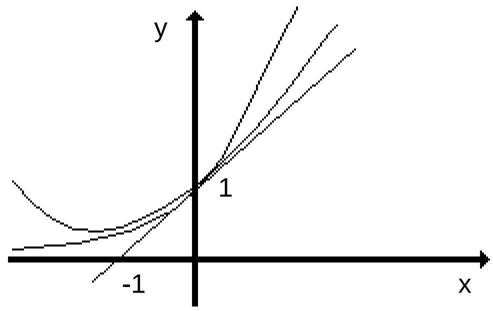
$$p_1(x) = 1 + x$$

e' anch'esso tale che $p_1(0) = 1$ e $p_1'(x) = 1$ e percio' tale polinomio coincide con la f e la sua derivata prima nel punto X = 0. Se approssimiamo ora f per mezzo di un polinomio di secondo grado P2, coincidente in X = 0 con f e le cui derivate coincidono con le prime due derivate di f, possiamo aspettarci una migliore approssimazione di f, che non la funzione lineare P1, almeno abbastanza vicino al punto (0, 1). Il polinomio:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$$

e' tale che :

$p_2(0) = f(0) = 1$ e $p_2{}'(2) = f'(0) = 1$ e p_2 $p_2{}''(2) = f''(0) = 1$



La figura mostra che il grafico di p_2 approssima meglio la curva $y = e^x$ che non la retta $y = 1 + x$, almeno abbastanza vicino al punto (0, 1). Per esempio, per X = 0,1 si ha:

$f(0{,}1) = 1{,}1052$; $p_1 = (0{,}1) = 1{,}1$; $p_2(0{,}1) = 1{,}105$

POLINOMI DI TAYLOR

Supponiamo che f abbia derivate fino all'ordine n+1 nel punto $x = 0$ per $n \geq 1$ e cerchiamo di determinare un polinomio P che coincida con f e con le sue prime n derivate in 0. Devono essere verificate n + 1 condizioni e precisamente:

$$p(0) = f(0) \ , \ p'(0) = f'(0) \ , p^n(0) = f^n(0)$$

Sia dato un qualsiasi polinomio

(1) $$p(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_n \cdot x^n$$

e un qualsiasi numero reale a; vogliamo ordinare $p(x)$ secondo le potenze del binomio $(x - a)$. Sia:

(2) $$p(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - a) + c_2 \cdot (x - a)^2 + \ldots + c_n \cdot (x - a)^n$$

lo sviluppo cercato, i cui coefficienti$c_0, c_1, c_2, \ldots . c_n$ devono essere determinati. Ponendo $x = a$, nell'identita' (2), otteniamo $p(a) = c_0 + 0$

(3) $$c_0 = p(a)$$

Derivando ambo i membri dell'identita' (2) si ottiene :

$$p'(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - a) + \ldots + n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1}$$

da cui ponendo $x = a$:

$$c_1 = p'(a)$$

Per le considerazioni che faremo ora si ricordi che $n \in N$ ed $n > 1$ si pone $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Inoltre $1! = 1$ e $0! = 1$.

Prendendo la derivata seconda, si trova :

$$p''(x) = 2!\cdot c_2 + \ldots + n\cdot(n-1)c_{n\cdot}(x-a)^{n-2}$$

da cui ponendo $x = a$, si ottiene $p''(a) = 2!\cdot c_2$, ossia:

(4) $$c_2 = \frac{p''(a)}{2!}$$

Per trovare gli altri coefficienti dello sviluppo (2) si utilizza lo stesso procedimento, trovando cosi':

$$c_3 = \frac{p'''(a)}{3!} \quad , \quad c_4 = \frac{p^4(a)}{4!} \quad , \text{ etc.}$$

E' evidente che si puo' scrivere la formula generale:

(5) $$c_k = \frac{p^k(a)}{k!} \qquad (k = 0,1,2,3,\ldots,n)$$

Introducendo i coefficienti (5) nello sviluppo (2), si ottiene la cosidetta formula di TAYLOR per un polinomio:

$$p(x) = p(a) + p'(a)\cdot(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^n(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

In generale se la funzione f(x) e' derivabile n+1 volte nell'intervallo I , allora $\forall$ x , a $\in$ I risula :

$$T_n f(x) = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{n+1}$$

dove ξ e' un punto dell'intervallo compreso tra x e a e dipendente da x , a e da n .

Il polinomio $T_n f(x)$ si dice polinomio di TAYLOR relativo alla funzione $f(x)$ e al punto iniziale a .

In particolare quando $a = 0$, il polinomio :

$$T_n f(x) = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k + \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot x^{n+1}$$

si dice polinomio di Mac-Laurin , che solitamente e' di piu' facile applicazione.

L'errore che si commette approssimando una funzione f nel punto a per mezzo del suo polinomio di TAYLOR TnF e' definito come la differenza :

$$E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$$

ESEMPI

1) Sviluppo mediante la formula di TAYLOR della funzione :

$f(x) = \ln(x^2+1)$ a = 1

Essendo questa funzione derivabile infinite volte , si potra' scegliere l'ordine della formula a piacere :

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$$
$$f'(a) = 1$$
$$f''(x) = \frac{-2 \cdot x^2 + 2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$
$$f''(a) = 0$$
$$f'''(x) = \frac{4 \cdot x^3 - 12 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^3}$$
$$f'''(a) = -1$$
$$f^{(IV)}(x) = \frac{-12 \cdot x^4 + 72 \cdot x^2 - 12}{\left(x^2 + 1\right)^4}$$
$$T_n f(x) = \ln 2 + (x-1) - \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^4 - 6 \cdot \xi^2 + 1}{\left(\xi^2 + 1\right)^4} \cdot (x-1)^4$$

2) Sviluppo mediante la formula di Mac-Laurin della funzione :
$$f(x) = e^x$$

Anche questa funzione e' derivabile infinite volte ; tenuto conto inoltre che le derivate della funzione coincidono tutte con la funzione di partenza , si ottiene :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{\xi} \cdot x^{n+1}$$

Valutiamo ora l'errore che si commette per n = 4 nel caso di x = 1 :
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{e^{\xi}}{120}$$

Poiche' $\xi \in [0, 1]$, si ha :

$$1 \le e^{\xi} \le e < 3$$

e percio' :
$$\frac{1}{120} \le E_5 < \frac{3}{120}$$

L'approssimazione senza resto vale 65/24 e pertanto e differisce da 65/24 per meno di 3/120

3) Sviluppo della funzione :

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Come per l'esempio precedente , la funzione e' definita in tutto l'asse reale e indefinitamente derivabile.
Questo significa che si possono scegliere il punto iniziale a e l'ordine n a piacere.
In questo caso la scelta a = 0 sembra la piu' ovvia :

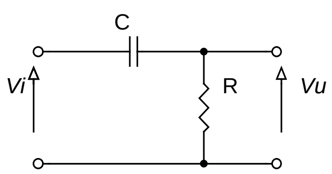
$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(IV)}(0) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Per n = 4 si avra' :

$$sen\, x = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot cos\, \xi \cdot x^5$$

DERIVATORI

Fra i circuiti a resistenza e capacita' di impiego comune il circuito CR viene spesso indicato come derivatore, esso viene impiegato per ottenere da un'onda quadra un segnale costituito da impulsi positivi o negativi, che vengono spesso utilizzati come segnali di comando.



In questo circuito la tensione d'uscita V0 viene prelevata dalla resistenza R. Vediamo ora di fare una semplice analisi per individuare poi i punti dove il circuito lavora da derivatore.

$$v_i = v_c + v_r \qquad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Se imponiamo questa condizione:

$$v_c >> v_r \quad \text{da cui} \quad v_i \cong v_c$$

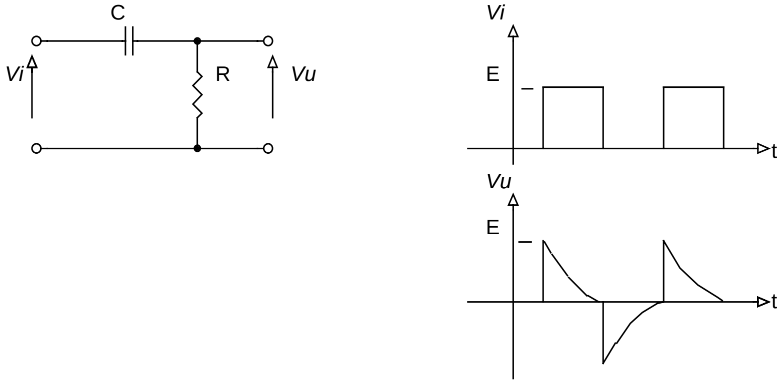
risulta che:

$$i_c = C \frac{dv_i}{dt}$$

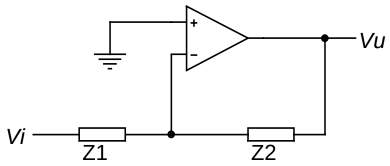
La caduta di tensione sulla resistenza, e cioe' la tensione d'uscita risulta:

$$v_r = R \cdot i_c = R \cdot C \frac{dv_c}{dt} \cong R \cdot C \frac{dv_i}{dt}$$

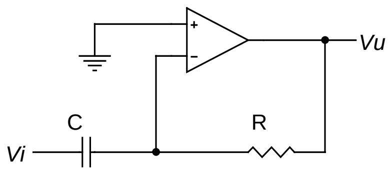
Osservando la formula si puo' notare come, la tensione d'uscita e' funzione della derivata della tensione d'ingresso.



Analizzando il circuito con una tensione d'ingresso come quella in figura risulta che:; All'arrivo del fronte di salita di Vi, il condensatore, inizialmente scarico, non puo' cambiare istantaneamente potenziale, sicche' su R viene a cadere tutta la tensione E. Poi rapidamente C si carica, la corrente decresce esponenzialmente e cosi' anche la Vu si porta esponenzialmente a 0. Quando, col fronte di discesa, Vi torna a 0, il condensatore ormai carico ad E con la polarita' in figura, applica la sua tensione ad R, sicche' la Vu scende rapidamente al valore -E.Poi man mano che C si scarica, la Vu sale esponenzialmente a 0. La zona in cui il circuito si comporta da derivatore e' quella indicata sul grafico, non puo' essere infatti quella in cui la Vu passa bruscamente ad E, perche' in questa zona non e' piu' soddisfatta la condizione iniziale.
Il circuito derivatore puo' essere anche realizzato attraverso amplificatori operazionali.



Dalla configurazione invertente in figura si puo' ottenere un derivatore, sostituendo un condensatore all'impedenza Z1 e una resistenza alla Z2.
L'uso di derivatori, realizzati con operazionali, invece di reti CR passive, e' diffuso sia per la possibilita' di amplificazione offerta' dagli operazionali, sia per la trascurabile impedenza d'uscita.La progettazione e la realizzazione pratica, nonche le prestazioni di questi circuiti, richiedono pero' una certa attenzione.



Vediamo ora di analizzare il funzionamento di questo circuito, cercando di individuarne cosi' i limiti che presenta. Applicando le proprieta' degli operazionali in zona lineare possiamo scrivere:

$$V_{NI} = V_I$$

Di conseguenza tutta la Vi cade ai capi del condensatore, percio':

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = C\frac{dv_i}{dt} \qquad , \qquad i_R = \frac{v_u}{R}$$

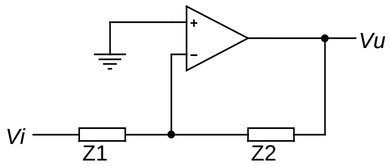
$$i_c + i_r = 0 \qquad\qquad \frac{v_u}{R} + C\frac{dv_i}{dt} = 0$$

da cui ricaviamo :

$$v_u = -C \cdot R\frac{dv_i}{dt}$$

Da questa relazione si capisce come il circuito in figura funziona da derivatore, la tensione d'uscita e' proporzionale alla derivata della tensione d'ingresso. Vediamo ora di analizzare in generale il funzionamento nel dominio della frequenza.

FUNZIONAMENTO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA



Un circuito del tipo indicato in figura ha una funzione di trasferimento data dalla espressione :

$$\overline{A_v} = -\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}}$$

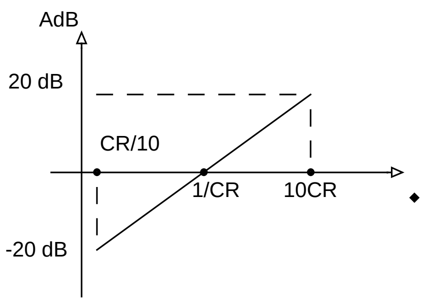
Bisogna ora vedere come si comportano modulo e fase al variare della frequenza.
Nel derivatore :

$$\overline{Z_2} = R \qquad\qquad \overline{Z_1} = \frac{1}{j\omega \cdot C}$$

Facendo gli opportuni calcoli si ottiene che :
.

$$\overline{A_v} = -j\omega \cdot CR \qquad \left|\overline{A_v}\right| = \omega \cdot CR \qquad \varphi = -90^o.$$

Si capisce subito come al variare della frequenza varia solo il modulo di Av, la fase e' fissa a -90°.

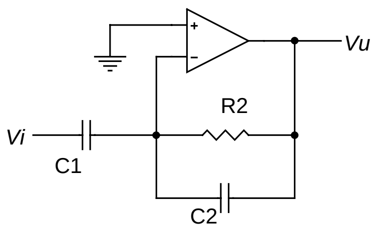


$$A_v dB = 20\,log_{10}\ \omega \cdot CR \qquad \text{da cui:}$$

$$\omega \cdot CR = 1 \quad \omega = \frac{1}{CR}\ .$$

Un dispositivo che aumenta il suo guadagno all'aumentare della frequenza causa grossi problemi. Infatti se ci sono dei disturbi alle alte frequenze, questi vengono amplificati piu' del segnale.

Bisogna percio' ridurre il guadagno alle alte frequenze, per fare questo si devono aggiungere due elementi al circuito iniziale; vediamo di farlo in due fasi separate.



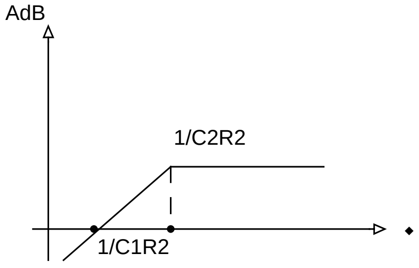
La prima modifica e' quella di aggiungere un condensatore in parallelo alla R2;

Analizziamo ora i suoi effetti sul circuito derivatore, e in particolare cosa succede al guadagno in alta frequenza.

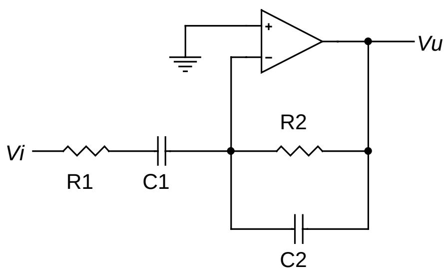
$$.\overline{A_v} = \frac{-j\omega \cdot C_1 R_2}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2}$$

$$\left|A_v\right| = \frac{\omega \cdot C_1 R_2}{\sqrt{1 + \left(\omega \cdot C_2 R_2\right)^2}}$$

$$|A|_{dB} = 20\log_{10} \omega \cdot C_1 R_2 - 20\log_{10} \sqrt{1+\left(\omega \cdot C_2 R_2\right)^2}$$



Il funzionamento da drivatore si ha sotto il punto d'angolo; sopra questo punto il guadagno risulta costante comunque i disturbi vengono amplificati per questo si aggiunge un altro elemento.



La seconda modifica e' quella di aggiungere una R1 in serie al condensatore in ingresso, vediamo cosi' come si comporta il guadagno alle alte frequenze.

$$\overline{A}_v = \frac{-j\omega \cdot C_1 R_2}{\left(1+ j\omega \cdot C_2 R_2\right) \cdot \left(1+ j\omega \cdot C_1 R_1\right)}$$

$$\left|A_v\right| = \frac{\omega \cdot C_1 R_2}{\sqrt{1+\left(\omega \cdot C_2 R_2\right)^2} \cdot \sqrt{1+\left(\omega \cdot C_1 R_1\right)^2}}$$

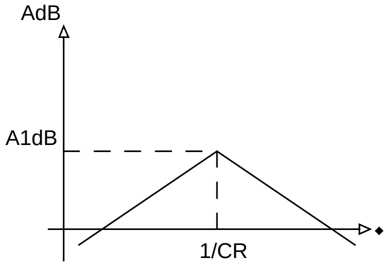
.Imponiamo la condizione di coincidenza fra :

$$C_1 R_1 = C_2 R_2 = CR$$

e inoltre:

$$\frac{1}{C_1 R_2} << \frac{1}{C_2 R_2}$$

$$|A|_{dB} = 20\log_{10}\left(\omega \cdot C_1 R_2\right) - 40\log_{10} \sqrt{1+\left(\omega \cdot CR\right)^2}$$



In questa configurazione l'effetto derivativo si ha sempre alle basse frequenze mentre alle alte il guadagno viene diminuito, in questo modo si evita di amplificare i disturbi.

BIBLIOGRAFIA:

- Tom M. Apostol - CALCOLO volume primo Analisi 1 - Bollati Boringhieri 1990

- G. Zwirner L Scaglianti - Analisi infinitesimale e numerica - CEDAM 1986

- Livia Tonolini Franco Tonolini - Corso superire di Matematica 2 - Minerva Italica

- L. Lamberti L. Mereu A. Nanni - Matematica secondo - Etas Libri 1993

- G. Zwirner - Complementi di matematica - Cedam

- E.Cuniberti L. De Lucchi B. De Stefano Elettronica Componenti e tecniche circuitali Vol. 2-3 Petrini editore 1992

IMPAGINAZIONE:

MICROSOFT Word per Windows

STAMPANTE:

LASERJET IIP Hewlett Packard.