

***Istituto Professionale di Stato per l'Industria e l'Artigianato
MORETTO
Via Luigi Apollonio, 21 BRESCIA***

ANALISI NUMERICA

Cenni sulla teoria degli errori

*a cura di :
Alessandro Conti*

Derivazione numerica

*a cura di :
Davide Foré*

Integrazione numerica

*a cura di :
Claudio Avigo*

della classe 5EI TIEE

Brescia giugno 1993

ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA

Nell'insieme dei numeri reali (\mathbb{R}) si sono studiate diverse proprietà delle varie operazioni come: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenze ad esponente razionale. Bisogna però osservare che a volte i numeri reali che vengono impiegati in una determinata operazione non sono esattamente conosciuti poiché sono ottenuti sperimentalmente, sono cioè risultati di alcune misure. Nonostante la buona precisione degli strumenti otteniamo solamente un "inquadramento" del risultato.

Inoltre certi numeri sono, in linea di principio, conosciuti esattamente, ma la scrittura di tali numeri nel sistema decimale ad esempio è impossibile, poiché l'allineamento decimale che li rappresenta è illimitato, non periodico ($\sqrt{2}$, π , $\sqrt{3}$), quindi non si può utilizzare che un valore approssimato di tale numero.

Il problema che ci poniamo quindi è questo: "conoscendo un inquadramento di due numeri reali ad esempio $-a-$ e $-b-$ determinare per un'operazione generica un inquadramento del risultato di questa operazione".

Questo è l'argomento di calcolo numerico che verrà svolto successivamente.

IL CALCOLO NUMERICO

I primi elementi della matematica devono la loro origine alla necessità di risolvere dei problemi pratici come ad esempio la misura dei campi, della navigazione ed altri problemi che dovevano essere in qualche modo risolti.

Molti matematici del tempo come ad esempio Newton, Eulero, Gauss, si sono occupati della risoluzione in forma numerica di problemi pratici, elaborando e studiando dei metodi numerici. Il perfezionamento degli strumenti di calcolo ha favorito una rapida estensione del campo di applicazione della matematica.

Basti pensare solamente alla costruzione dei calcolatori che hanno permesso di aumentare il numero di operazioni in un determinato tempo, in meno di trent'anni la velocità di calcolo da 0,1 operazioni al secondo siamo arrivati a 3.000.000 di operazioni al secondo.

per passare dal problema reale alla sua soluzione mediante calcolatore, abbiamo bisogno di tre fasi:

- 1) Individuazione del modello matematico che descrive il problema reale.*
- 2) Elaborazione di metodi (algoritmo) per trovare la soluzione numerica del problema matematico.*
- 3) L'impostazione dell'algoritmo sul calcolatore, cioè la sua traduzione in un linguaggio simbolico comprensibile dal calcolatore, e la sua soluzione.*

Quindi dobbiamo dire che il calcolo numerico è l'elaborazione di tecniche atte a trovare la soluzione numerica di un problema matematico.

Il bisogno di risolvere numericamente problemi sempre più numerosi ha generato un gran numero di nuovi metodi di calcolo.

ORIGINE E CLASSIFICAZIONE DEGLI ERRORI

Come sappiamo, nella risoluzione di problemi matematici gli errori si possono classificare nelle seguenti categorie:

A) **ERRORI INTRINSECI**: è molto difficile che la formulazione di un problema matematico rispecchi fedelmente il fenomeno reale; generalmente questi modelli sono schematizzati e idealizzati. Questa semplificazione porta dei veri errori (detti errori del problema).

Oltre a questo, i dati iniziali del problema non possono essere determinati che approssimativamente. Questi sono ad esempio tutte le costanti fisiche oppure i risultati di misure sperimentali (errori iniziali). Questi sono detti errori non eliminabili.

B) **ERRORI DI METODO**: qualche volta capita che sia difficile risolvere un problema enunciato in termini esatti per esempio quando la soluzione precisa necessita di un numero molto grande, di operazioni aritmetiche, oppure di un numero illimitato.

Si ricorre allora all'approssimazione, sostituendo il problema dato con uno approssimato i cui risultati differiscano di poco di quelli del problema iniziale.

C) **ERRORI DI CALCOLO**: questo tipo di errore viene a verificarsi quando i dati immessi nel calcolatore, quelli ottenuti in seguito e infine, i dati in uscita del calcolatore vengono approssimati.

Gli errori di calcolo sono di due tipi:

1) **Errori di troncamento**: sono quelli dovuti al fatto che generalmente si sostituisce ad un processo infinito di operazioni un'approssimazione finita di queste.

2) **Errori di arrotondamento**: sono quelli dovuti al fatto che, operando su numeri razionali periodici, o irrazionali, ci si limita ad operare su valori con un numero di cifre decimali finito, che ne costituiscono un'approssimazione.

ERRORE ASSOLUTO ED ERRORE RELATIVO

Come sappiamo tutti la misura di una determinata grandezza, rispetto ad un'unità di misura, non è altro che un numero x definito, questo dal punto di vista teorico.

I vari metodi di misura che noi conosciamo e siamo in grado di compiere però non ci potranno mai dare questo numero perfettamente definito, nel senso rigoroso della parola, anche se avessimo la possibilità di utilizzare i mezzi più raffinati e tutti gli accorgimenti della tecnica.

Questi metodi di misura che noi utilizziamo sono in grado solamente di fornirci dei numeri approssimati, cioè dei valori (indicati con la lettera $-a-$) differenti dal valore esatto x che lo sostituiscono nei calcoli. Possiamo intuire che anche i processi di "arrotondamento" e di "troncamento" sostituiscono, nei calcoli ad un numero esatto x un numero approssimato $-a-$.

Possiamo arrivare alla conclusione che se:

1) $a < x$ si dice che $-a-$ è un numero approssimato per difetto del numero x .

2) $a > x$ si dice che $-a-$ è un numero approssimato per eccesso di x .

Per esempio supponendo che il peso di una sfera di piombo sia compresa tra due valori come nella seguente disuguaglianza:

$$10.051g < \text{massa} - \text{della} - \text{pallina} < 10.053g$$

A questo punto viene spontaneo dire che ogni numero compreso fra gli estremi di questa doppia disuguaglianza è una misura o un valore approssimato della massa x della pallina.

Come ad esempio ottenendo un valore 10.0517, questo valore è una tale misura approssimata, quindi la differenza fra il valore vero x ed il valore misurato ci dà l'errore sulla misura effettuata ($x-10.0517$).

Naturalmente questo errore non è conosciuto, né in grandezza né in segno poiché altrimenti potremmo discendere al valore anche di x .

Quindi si preferisce procedere nel seguente modo: avendo ottenuto il numero $a = 10.052g$ la doppia disuguaglianza

$$10.052g < x < 10.053g$$

può anche essere scritta nel seguente modo :

$$-0.001 < x - a < 0.001$$

oppure anche nel valore assoluto :

$$|x - a| < 0.001g$$

Quindi dopo queste considerazioni arriviamo al punto in cui possiamo dire che il numero 0.001 è il valore massimo di cui ci si può sbagliare in più o in meno, quando andiamo ad eseguire la sostituzione di x con $-a$ - questo viene definito il **Margine di incertezza o incertezza assoluta o errore assoluto limite**.

Genericamente si danno le seguenti definizioni:

Si chiama errore assoluto -e- di un numero approssimato -a- , il valore assoluto della differenza tra il numero esatto corrispondente x ed il numero -a- cioè si scrive :

$$l = |x - a|$$

Importante da osservare è che questa differenza non può essere calcolata poiché non è conosciuto il valore esatto del numero x , quando è dato per approssimazione. Per ovviare a questi casi che sono i più numerosi nella pratica è meglio "maggiorare" l' errore assoluto in modo da sapere almeno entro quali limiti cade l' errore stesso. Entra così il concetto di margine di incertezza, o di errore limite , dato dalla seguente definizione .

Si chiama incertezza assoluta (o margine di incertezza o errore assoluto limite) di un numero approssimato ogni numero maggiore o uguale all' errore assoluto di questo numero.

Se ε è un errore assoluto limite di un numero approssimato, abbiamo la seguente definizione:

$$1 \quad l = |x - a| \leq \varepsilon$$

Quindi otteniamo :

$$2 \quad a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

Dalla formula n° 2 possiamo benissimo intuire che $a - \varepsilon$ è un valore approssimato per difetto del numero x mentre $a + \varepsilon$ è un numero approssimato per eccesso del numero x .

Essendo a un valore approssimato di x con un errore assoluto limite ε a volte possiamo anche scrivere

$$x = a \pm \varepsilon$$

per consuetudine $-a-$ ed ε si scrivono con lo stesso numero di decimali. Osservando che ε si può scrivere anche nella forma :

$$\varepsilon = \frac{a + \varepsilon - (a - \varepsilon)}{2}$$

questo significa che l'errore ε è dato dalla semidifferenza tra il massimo ed il minimo dei valori approssimati.

Si nota che il significato di errore assoluto limite è molto esteso :

per errore assoluto limite si intende uno qualsiasi degli infiniti numeri non negativi che verificano la disequazione n°1; in pratica però è utile scegliere per ε il più piccolo numero che verifichi la medesima disequazione.

Bisogna però riconoscere che l'errore assoluto non soddisfa alcune esigenze come ad esempio non ci fornisce il grado di precisione della misura o del calcolo, quindi se vogliamo compiere questo tipo di studio dobbiamo ricorrere anche alla conoscenza del concetto di errore relativo, e di errore relativo limite.

Si definisce errore relativo ε_r di un numero approssimato -a- il rapporto tra l'errore assoluto -l- di questo numero ed il modulo del numero esatto corrispondente $X(X \neq 0)$ cioè poniamo

$$\varepsilon_r = \frac{l}{|x|}$$

Quindi ne ricaviamo che :

$$l = \varepsilon_r \cdot |x|$$

Viene chiamata incertezza relativa (o margine di incertezza limite , o errore relativo limite) ε_r del valore approssimato -a- il rapporto tra l'errore assoluto limite ε e il numero -a- cioè si pone :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{a}$$

L'errore relativo viene spesso, scritto sotto forma di percentuale. Infine possiamo notare che disequazione n°2 può anche essere scritta nel seguente modo :

$$a \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} \right) \leq x \leq a \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} \right)$$

quindi possiamo ottenere essendo $\varepsilon_r = \varepsilon/a$

$$a(1 - \varepsilon_r) \leq x \leq a(1 + \varepsilon_r)$$

da cui ricaviamo :

$$x = a(1 \pm \varepsilon_r)$$

SCRITTURA DEI NUMERI APPROSSIMATI

La scrittura dei numeri approssimati deve indicare il grado della loro precisione o meglio il loro grado di approssimazione.

Per questo dobbiamo introdurre il concetto di cifra significativa :

Con cifre significative di un numero si intendono tutte le cifre della sua approssimazione decimale , partendo dalla prima cifra a sinistra diversa da zero.

Da osservare è che nelle scritture di grandi numeri gli zeri che sono scritti a destra possono indicare sia le cifre significative oppure l'ordine delle restanti cifre. Quindi per questo motivo la notazione usuale dei numeri può dare luogo a confusione .

Per fare un esempio, non possiamo stabilire il numero di cifre significative che possiede il numero 689000, possiamo solamente dire che ne possiede almeno tre.

Per ovviare a questi problemi dobbiamo scrivere il numero sotto forma di $6.89 \cdot 10^5$, se possiede tre cifre significative oppure $6.8900 \cdot 10^5$ se ne possiede cinque.

Si dice che le prime n cifre significative di un numero approssimato sono esatte, se l'errore assoluto di questo numero non supera la semiunità dell'ordine corrispondente.

Per esempio se $x = 57.97$ ed $a = 58.00$ questa è un'approssimazione con tre cifre esatte poiché:

$$|x - a| = 0.03 < \frac{1}{2} \cdot 0.1$$

Da osservare che la frase " n cifre esatte" non deve essere presa alla lettera, cioè nel senso che le prime n cifre significative di un dato numero approssimato $-a-$, che consti di n cifre esatte, coincidano con le cifre corrispondenti del numero esatto x .

Per esempio il numero approssimato $a = 9.995$ che sostituisce il numero preciso $x = 10$, consta di tre cifre esatte, anche se tutte le cifre di questi numeri sono differenti.

Tuttavia possiamo riscontrare casi in cui le cifre esatte di un numero approssimato coincidono con le cifre rispettive del numero preciso.

In alcuni casi si può dire per comodità che il numero $-a-$ è un'approssimazione in senso lato del numero esatto x , con n cifre esatte, intendendo che l'errore assoluto $\varepsilon = |x - a|$ non superi un'unità dell'ordine della n^{ma} cifra del numero approssimato.

Per portare un esempio possiamo dire che se $x = 322.4167$ mentre $a = 322.416$ questa è un'approssimazione a sei cifre esatte in senso lato poiché:

$$\varepsilon = 0.0007 < 1 \cdot 10^{-3}$$

Esistono delle regole pratiche per il calcolo dell'errore relativo: se $n > 1$ possiamo assumere come errore relativo limite, del numero approssimato positivo $-a-$ la cui prima cifra significativa è K , il numero

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

Se risulta

$$\varepsilon_r \leq \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

Allora il numero $-a-$ possiede n cifre esatte.

Per concludere dobbiamo dire che avendo un numero approssimato $-a-$ se è necessario sostituirlo con un numero $-a_1-$ con meno cifre significative seguiamo la seguente regola di arrotondamento in modo da ottenere un errore di arrotondamento $|a_1 - a|$ minimo:

REGOLE PER L'ARROTONDAMENTO: Per arrotondare un numero fino all' n^{ma} cifra significativa si eliminano tutte le cifre a destra dell' n^{ma} cifra significativa inoltre:

- Se la prima cifra eliminata è inferiore di 5 le cifre restanti rimangono invariate.
- Se la prima cifra eliminata è maggiore di 5, si aggiunge una unità all'ultima cifra conservata.
- Se la prima cifra eliminata è 5 e se fra le altre cifre eliminate ce ne sono diverse da zero, l'ultima cifra conservata viene aumentata di un'unità.
- Se la prima cifra eliminata è 5, mentre tutte le altre cifre eliminate sono degli zero, l'ultima cifra conservata rimane invariata se è pari e si aggiunge un'unità se è dispari.

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Un argomento di interesse nel campo del calcolo numerico consiste nella valutazione degli errori indotti nel risultato di un procedimento di calcolo a partire da dati approssimati, e quindi affetti da errore.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DI NUMERI APPROSSIMATI

L' errore assoluto limite della somma o della differenza di due (o più) numeri approssimati , è uguale alla somma degli errori assoluti limite di questi numeri:

Proviamo ad eseguire questo teorema nel caso di una somma o differenza di due numeri $-a-b-$
Poiché $-a-$ e $-b-$ sono affetti da errori indicati con Δa e Δb si può scrivere che la somma è data da:

$$s = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$$

quindi è scrivibile anche nel seguente modo :

$$(a - \Delta a) + (b - \Delta b) < s < (a + \Delta a) + (b + \Delta b)$$

L' errore Δs della somma è dato dalla semidifferenza dei valori estremi :

$$\Delta s = \frac{(a + \Delta a) + (b + \Delta b) - (a - \Delta a) - (b - \Delta b)}{2} = \Delta a + \Delta b$$

Nel caso della differenza otteniamo lo stesso risultato :
-essendo la differenza

$$d = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$

$$(a - \Delta a) - (b + \Delta b) < d < (a + \Delta a) - (b - \Delta b)$$

-quindi eseguendo la semidifferenza dei valori estremi

$$\varepsilon_d = \frac{[(a + \Delta a) - (b - \Delta b)] - [(a - \Delta a) - (b + \Delta b)]}{2} = \Delta a + \Delta b$$

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DI NUMERI APPROSSIMATI

La trasmissione degli errori si manifesta anche nell' operazione di moltiplicazione e di divisione, naturalmente in modo diverso e segue il seguente teorema :

L'errore relativo limite del prodotto o del quoziente di più numeri approssimati , diversi da zero , non supera la somma degli errori relativi di questi numeri.

PRODOTTO

Se proviamo ad eseguire un prodotto tra due numeri approssimati $-a-$ e $-b-$, con i loro rispettivi errori Δa e Δb , risulta:

$$p = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b)$$

da cui ricaviamo la seguente doppia disequazione :

$$(a - \Delta a) \cdot (b - \Delta b) < p < (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b)$$

L' errore Δp è dato dalla semidifferenza dei valori estremi , cioè :

$$\frac{1}{2} \cdot (ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \cdot \Delta b - ab + a\Delta b + b\Delta a - \Delta a \cdot \Delta b) = a\Delta b + b\Delta a$$

A questo punto se volessimo passare dall' errore assoluto all' errore relativo otterremmo :

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{ab} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}$$

QUOZIENTE

Consideriamo ora il caso del quoziente fra due numeri approssimati $-a-$ e $-b-$. Ragionando nello stesso modo del prodotto otteniamo essendo :

$$q = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} \quad \text{da cui} \quad \frac{a - \Delta a}{b + \Delta b} < q < \frac{a + \Delta a}{b - \Delta b}$$

L' errore Δq del quoziente è dato sempre dalla semidifferenza degli estremi , quindi si ottiene di conseguenza :

$$\Delta q = \frac{1}{2} \left(\frac{a + \Delta a}{b - \Delta b} - \frac{a - \Delta a}{b + \Delta b} \right) = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2 - \Delta^2 b} =$$

Trascurando il termine $\Delta^2 b$, poiché è una quantità molto più piccola rispetto a b^2 , otteniamo la seguente espressione :

$$\Delta q = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2}$$

Se vogliamo passare dall' errore assoluto all' errore relativo si ha:

$$\varepsilon_q = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{a \cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}$$

1) Dalle definizioni date, per quanto riguarda la trasmissione degli errori in un prodotto si può notare che l' errore relativo non può essere minore dell' errore relativo del fattore meno preciso. Quindi non c'è motivo di tenere un numero eccedente di cifre significative nei fattori più precisi :

Da ricordare la seguente regola

-Per trovare il prodotto di più numeri approssimati con differente numero di cifre significative esatte , è sufficiente :

a) arrotondarli in modo che ciascuno di essi abbia una o due cifre significative in più del numero di cifre esatte del fattore meno preciso ;

b) conservare, dopo la moltiplicazione, tante cifre significative quante sono le cifre esatte nel fattore meno preciso (o conservare una cifra in più).

2) Se i fattori hanno lo stesso numero di decimali esatti, ma vi sono molti fattori (per es., più di quattro) si raccomanda di ridurre di uno (o due) il numero di decimali esatti nel prodotto.

3) Notiamo che i fattori assolutamente precisi non influiscono sulla scelta del numero di decimali esatti in un prodotto.

BIBLIOGRAFIA

Scaglianti , G. Zwirner.

Strumenti e metodi matematici - *ESERCIZI E COMPLEMENTI* vol 2

Cedam.

G. Zwirner.

COMPLEMENTI DI MATEMATICA.

Cedam.

DERIVAZIONE NUMERICA

Problemi che conducono al concetto di derivata:

ESEMPIO :

Supponiamo di lanciare un corpo dall'alto verso il basso. Il corpo non avrà un moto uniforme, e quindi non manterrà una velocità costante. Questo è anche noto nell'equazione del moto uniformemente accelerato:

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + S_0$$

all'istante in cui avverrà il lancio avremo una

$$g = 9.8m/sec^2$$

Per risolvere il problema della determinazione della velocità istantanea occorrere una definizione rigorosa di velocità istantanea; cercheremo di arrivarci attraverso un ragionamento intuitivo: la velocità media in un intervallo è data da:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Nel caso di moto uniforme questo rapporto nei vari intervalli rimane costante, e quindi la V_i coincide con quella media. Nel nostro caso il moto non è uniforme, ma possiamo fare la seguente considerazione: in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo, la velocità del corpo preso in esame non subisce grandi variazioni; dunque se Δt è abbastanza piccolo la velocità media, nell'intervallo di tempo $[t; t + \Delta t]$, si può considerare come approssimazione della V_i all'istante t .

Supponiamo di avere :

$$g = 9.8m/sec^2$$

$$V_0 = 0.2m/sec$$

$$S_0 = 0m$$

Supponendo di calcolare la velocità del corpo dopo un secondo, $t = 1sec.$; sostituendo i valori nella formula ed assumendo un Δt sempre più piccolo, si vedrà che la velocità media del corpo in quell'intervallo tenderà ad avvicinarsi a quella istantanea.

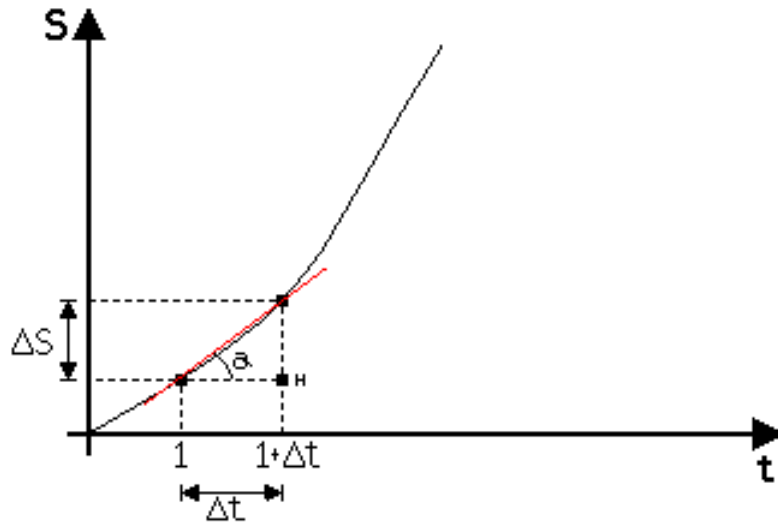
Δt	V_m
0,1	10,49
0,01	10,049
0,001	10,0049

Più Δt è piccolo più la approssimazione di V_m con V_i è vera.

Interpretazione grafica dei risultati

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + S_0 \quad \text{con i valori prima elencati:}$$

$$S(t) = 4.9t^2 + 0.2t$$



Rappresentando l'equazione su un piano cartesiano, la curva rappresentante l'equazione sarà una parabola passante per l'origine. Considerando il punto P di ascissa pari a 1, e il punto Q di ascissa pari a $1 + \Delta t$, il valore Δt sarà dato dalla differenza $t_q - t_p$;

$$t_q - t_p = 1 + \Delta t - 1 = \Delta t$$

Stesso procedimento viene seguito per il valore che assume la funzione in quell'intervallo, ossia ΔS , che sarà la differenza tra le ordinate dei punti Q e P.

$$S_q - S_p = S(1 + \Delta t) - S(1) = \Delta t$$

La velocità media sarà dunque, nell'intervallo $t; t + \Delta t$

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S_q - S_p}{t_q - t_p} \quad [2]$$

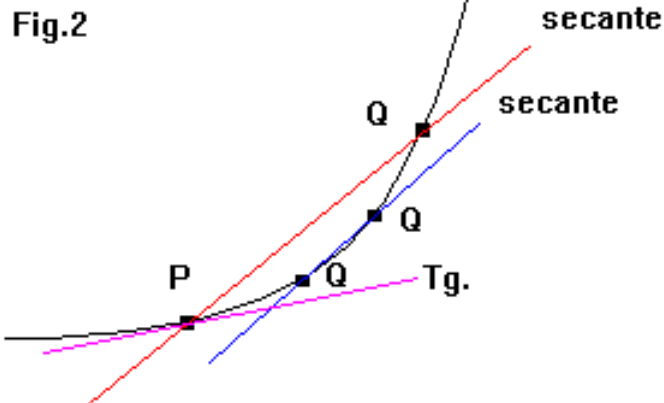
Ricordando che in un piano cartesiano il rapporto tra Δy e Δx , calcolato nei punti $P(x_p, y_p), Q(x_q, y_q)$, rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per Q e P.

$$mpq = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \quad [3]$$

L'unica differenza è che al posto di x e y, utilizziamo t e S .

Confrontando la [2] e la [3], risulta che la V_m nell'intervallo $t; t + \Delta t$ corrisponde al coefficiente angolare della retta che taglia la curva nei punti P e Q.

Inoltre dalla figura 1 si nota che ΔS e Δt rappresentano le misure dei segmenti QH e PH: quindi $\Delta S / \Delta t$ rappresenta il rapporto tra i cateti PHQ: il valore della velocità media perché rappresenta anche la tangente di alfa.



Considerare Δt piccoli, significa considerare punti Q1, Q2, Q3 sempre più vicini a P; quindi secanti PQ1, PQ2, PQ3 che tendono ad avvicinarsi alla retta tangente nel punto P. Le velocità medie che si ottengono con tali Δt , essendo i coefficienti angolari delle rette secanti, tendono ad avvicinarsi al valore del coefficiente angolare della retta tangente del punto P. Quindi la V_i all'istante $t = 1$ sarà il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto d'ascissa $t = 1$.

ESEMPIO :

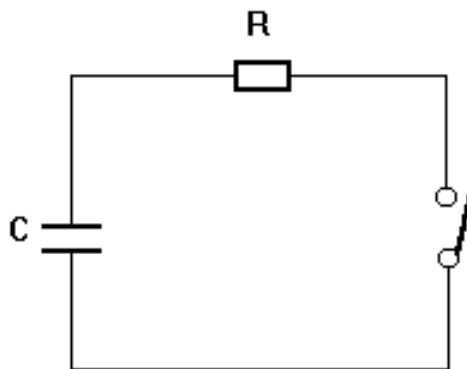


fig. 3

Il condensatore C possiede una certa carica Q_0 . All'istante $t = 0$, supponiamo che si chiuda l'interruttore e che quindi il condensatore cominci a scaricarsi, e la sua scarica dipenderà dal tempo. Indichiamo con $Q(t)$ la carica del condensatore in un istante t . Avendo una certa carica, il condensatore farà in modo che cominci a circolare una certa corrente; l'intensità media di corrente in un intervallo $[t_0; t_0 + \Delta t]$ è data dalla carica $Q(t)$ del condensatore fratto l'intervallo di tempo.

La carica persa dal condensatore sarà quella che attraverserà una certa sezione del circuito. Quindi:

$$\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$$

La carica elettrica che attraversa il circuito è $-\Delta Q$: questo perché consideriamo la carica persa.

$$I_m = \frac{-\Delta Q}{\Delta t}$$

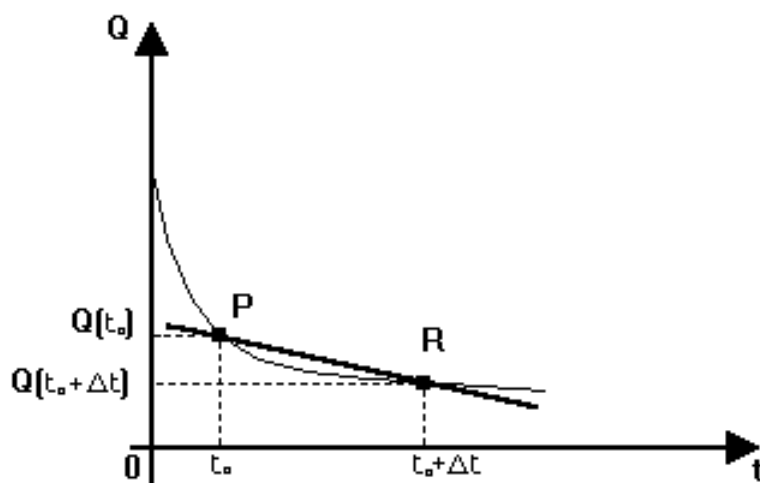


fig. 4

La

rappresentazione grafica della I_m , in un piano cartesiano intensità - tempo, è analoga a quella della V_i vista in precedenza. Poiché la curva da noi considerata è decrescente, avremo un coefficiente angolare negativo. Quindi analogamente a prima, possiamo dire che la I_m è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $Q = Q(t)$ nel punto d'ascissa t_0 .

Rapporto incrementale e derivata numerica

Prendiamo $y = f(x)$ l'equazione di una funzione. Si rappresenti su un piano cartesiano l'andamento della funzione e si fissi un punto P di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

Ora si prenda un altro punto sul Q sul grafico si incrementando x_0 di una certa quantità h «abbastanza piccola». Generalmente si prende $h > 0$, ma si possono fare le stesse considerazioni anche con $h < 0$. Quindi Q avrà coordinate:

$$Q(x_0 + h; f(x_0 + h)).$$

La retta passante per P e Q è secante e il rispettivo coefficiente angolare sarà:

$$mpq = \frac{yq - yp}{xq - xp} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il valore di mpq viene chiamato **rapporto incrementale**.

h può essere indicato anche Δx ed è detto incremento della variabile indipendente, mentre il numeratore si indica anche con Δy , ed è detto incremento della funzione. Quindi il rapporto incrementale è definito come:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

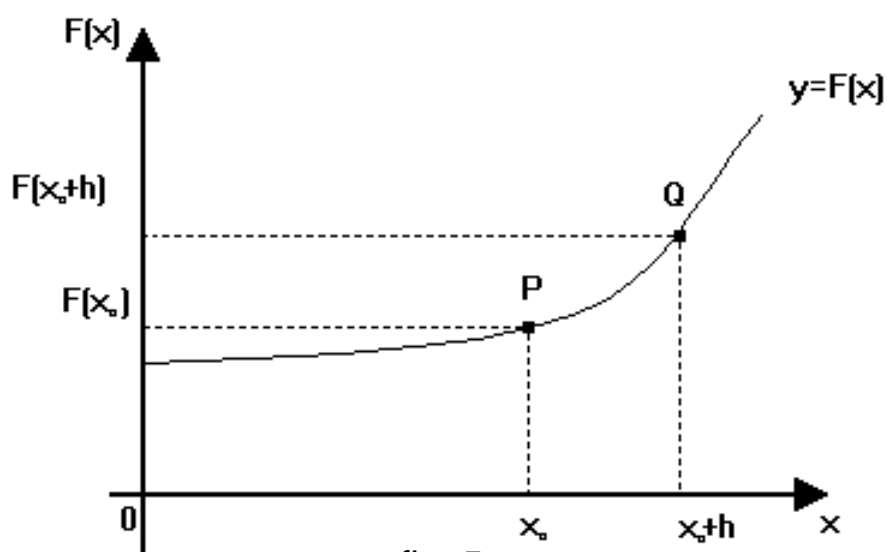


fig. 5

Derivata

Se consideriamo valori di h più piccoli, otterremo dei punti Q1, Q2, Q3 sempre più vicini al punto P. Se esiste una retta che non sia parallela all'asse y , tangente al punto P, allora le rette secanti PQ1, PQ2, PQ3 si avvicineranno sempre più alla retta tangente. Il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 viene chiamato derivata della funzione $f(x)$ nel punto $x = x_0$ e viene indicato con la scrittura $f'(x_0)$. Nel caso in cui la retta tangente sia parallela all'asse y , il coefficiente angolare non sarà definito e quindi la derivata è infinita.

Prima formula di derivazione numerica

Da quanto detto il valore del rapporto incrementale, con $h \rightarrow 0$, tende a $f'(x_0)$. Questo concetto si può scrivere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

In base alle considerazioni fatte, il coefficiente angolare di una retta secante, cioè il rapporto incrementale calcolato con h «abbastanza piccolo», può essere una approssimazione della derivata:

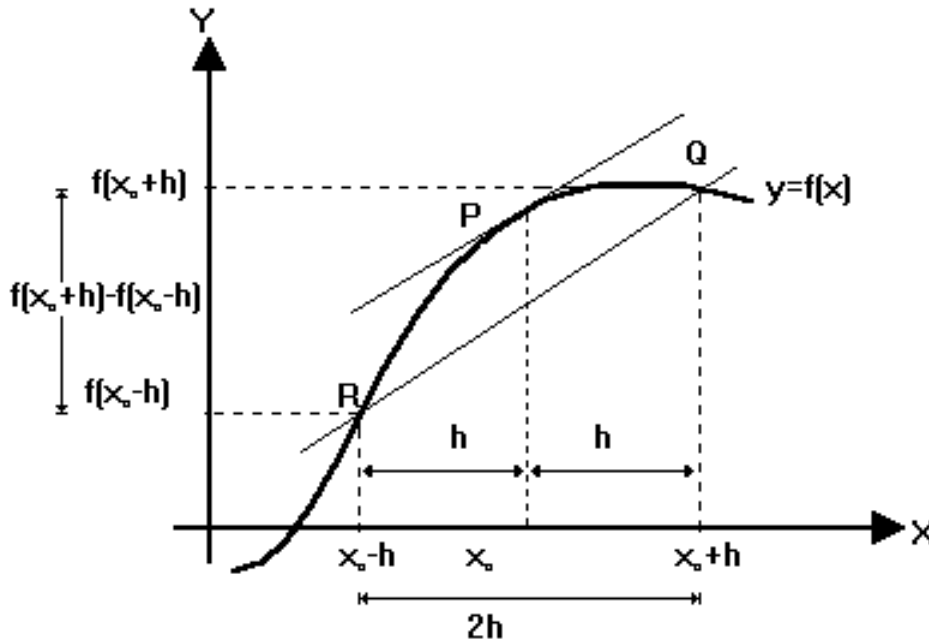
$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Questa formula viene chiamata prima formula di derivazione numerica. In questa formula l'incremento di h viene chiamato passo di derivazione.

Seconda formula di derivazione numerica

Una migliore approssimazione della derivata si può ottenere con la seconda formula di derivazione numerica:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$



Prendiamo il punto P del grafico di ascissa x_0 . Consideriamo sul grafico i punti Q e R di ascissa $x_0 - h$ e $x_0 + h$ quindi:

$$Q(x_0 + h; f(x_0 + h)); R(x_0 - h; f(x_0 - h))$$

Il coefficiente angolare della retta secante RQ:

$$mrq = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{(x_0 + h) - (x_0 - h)} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

La seconda regola di derivazione numerica, approssima il coefficiente angolare della retta tangente del punto P, con il valore del coefficiente angolare della retta secante nei punti Q e R.

Valutazione della precisione delle approssimazioni

Sapere un'approssimazione di una derivata è inutile, se non si può valutare la precisione dell'approssimazione. Il problema della valutazione dell'approssimazione è studiato dalla teoria degli errori, esposta in precedenza. Formuleremo una regola pratica, che permette di sapere quante cifre decimali delle approssimazioni possono essere ritenute esatte.

Se due approssimazioni di una derivata, in cui la seconda è ottenuta dividendo per 10 il passo di derivazione utilizzato per calcolare la prima, (cioè h utilizzato nella prima, viene diviso per 10 nella seconda), coincide nelle prime n cifre decimali dopo la virgola, queste cifre possono ritenersi esatte.

Questa regola è di carattere empirico, quindi potranno esserci in casi eccezionali dei risultati errati. Le considerazioni e i vari esempi porterebbero a dire che riducendo opportunamente il passo di derivazione, si possono effettuare approssimazioni di $f'(x_0)$ più precise.

Questo perché quando si applica la formula di derivazione numerica si fa un errore di calcolo, dovuto al fatto che consideriamo un numero limitato di cifre decimali.

Per esempio si assuma:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Anche se potessimo calcolare esattamente il membro destro, non otterremmo il valore esatto, ma una approssimazione di $f'(x_0)$. Inoltre nel membro destro si usano valori $f(x_0+h)$ e $f(x_0)$ arrotondati e troncati e quindi non esatti. Il valore di destra risulta essere un'approssimazione. Riassumendo applicando la regola di derivazione numerica, si ottiene un'approssimazione, di una approssimazione di $f'(x_0)$.

L'errore causato dall'arrotondamento e troncamento è inversamente proporzionale al passo di derivazione h e quindi cresce al diminuire di h . Risulta essere inutile calcolare approssimazioni di $f'(x_0)$ con h eccessivamente piccoli. Quindi si può enunciare la seguente regola pratica:

Se si opera con 2n cifre decimali dopo la virgola (per semplicità, in modo da utilizzare cifre decimali pari), si devono utilizzare passi di derivazioni h che in valore assoluto, non siano inferiori a 10-n.

ESEMPI:

Prendiamo la funzione $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ [1]

Calcoliamo la derivata nel punto 3. In questo caso possiamo calcolare il valore esatto della derivata, perchè possiamo usufruire del calcolo infinitesimale. Quindi andremo a vedere la differenza fra il risultato ottenuto dal calcolo infinitesimale e quello ottenuto attraverso l'approssimazione. La derivata ottenuta dal calcolo infinitesimale sarà data da:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Ora verificheremo i risultati con lo studio dell'analisi approssimata:

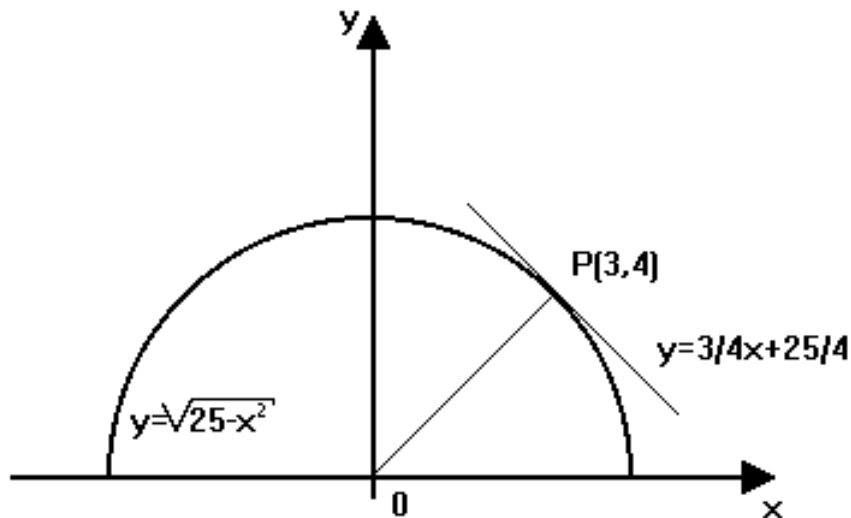
Poichè la funzione deve essere posta maggiore di 0 avremo che:

$$\begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

L'equazione sarà una circonferenza con centro nell'origine con raggio pari a 5. Quindi la [1] sarà una semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5. Questa sarà posizionata nel semipiano delle ordinate positive. La retta tangente alla curva dovrà essere perpendicolare al raggio OP.

Prendiamo il punto P di coordinate (3,4). Il coefficiente angolare del raggio sarà dato da:

$$m_{0p} = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0}$$



Il coefficiente angolare della retta tangente sarà dato da:

$$m = -\frac{1}{m_{0p}} \rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Si può dedurre che la derivata nel punto 3 vale:

$$f'(3) = -\frac{3}{4}$$

Ora analizzeremo le approssimazioni date dalla prima formula di derivazione numerica. Applicando la prima formula di derivazione numerica alla funzione di partenza con $x_0 = 3$ e $h = 0.05$; $h = 0.02$; $h = 0.01$ si ottengono i risultati sotto elencati:

H	$f'(x_0) \approx$
0.05	-0.759858
0.02	-0.753920
0.01	-0.751956

In pratica, conoscendo il valore esatto della derivata, è inutile calcolarne il valore approssimato. L'esempio è stato scelto per confrontare il valore esatto con il valore approssimato.

Analizzando i valori in tabella si nota che al diminuire di h l'approssimazione $f'(3)$ si avvicina sempre più al valore esatto, che corrisponde a $f'(3) = -\frac{3}{4} = -0.75$.

Considerando nuovamente la funzione $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e applicando la seconda regola di derivazione numerica nello stesso punto, cioè $x_0 = 3$, con gli stessi passi di derivazione utilizzati in precedenza si può ottenere una migliore approssimazione, più vicina al valore esatto.

Con $h = 0.05$:

$$f'(3) = -0.75009157$$

Con $h = 0.02$:

$$f'(3) = -0.75001464$$

Con $h = 0.01$:

$$f'(3) = -0.75000366$$

Ora calcoliamo l'approssimazione della derivata nel punto $x_0 = 3$ con un passo di derivazione pari a $h = 0.00001$. Con questo passo di derivazione si ottiene una approssimazione poco precisa. Infatti:

$$f'(3) = -0.8 \quad \text{Con la prima formula di derivazione numerica}$$

Mentre in precedenza con passi di derivazione più piccoli, si erano ottenuti approssimazioni più valide in questo caso, utilizzando 6 cifre decimali dopo la virgola, si è ottenuta un'approssimazione meno valida.

Ora comporre una tabella dove verrà riportato l'errore da cui è affetto ciascuna approssimazione. Ricordando che l'errore è dato da $|\text{valore esatto} - \text{valore approssimato}|$; l'errore ci stabilisce quanto è precisa l'approssimazione.

6 cifre decimali		
h	approssimazione	errore
0.1	-0.76991	-0.1991
0.01	-0.752	0.002
0.001	-0.751	0.001
0.0001	-0.76	0.01
0.00001	-0.8	0.05
0.000001	-1	0.25

Dalla tabella si nota che utilizzando un passo di derivazione troppo piccolo si ottiene un errore troppo grande.

BIBLIOGRAFIA

N. Doderò , P. Baroncini , R. Manfredi

INTINERARI DI MATEMATICA

Ghisetti e Corvi

G. Zwirner , L. Scaglianti

Strumenti e metodi matematici - ESERCIZI E COMPLEMENTI vol 2

Cedam

INTEGRAZIONE NUMERICA

Utilizzando il teorema di Torricelli-Barrow, supponiamo che se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a,b]$, e se si conosce la sua primitiva principale $F(x)$, l'integrale definito della funzione stessa, all'interno dell'intervallo delimitato da a e b , può essere calcolato con la formula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{dove } f(x) \text{ è la } F'(x)$$

Bisogna però osservare che molte volte non è possibile determinare un integrale definito utilizzando le normali regole di integrazione, oppure può accadere che il calcolo risulti lungo e molto laborioso. Questi problemi possono nascere quando non si utilizzano funzioni espresse analiticamente, ma funzioni empiriche, cioè funzioni di cui si conosce solo l'andamento (ricavato dalla conoscenza delle coordinate di alcuni suoi punti).

Un secondo tipo di problema può sorgere dall'utilizzo del computer, infatti molti programmi che svolgono calcoli aritmetici non sono in grado di utilizzare le regole di integrazione, e queste devono essere introdotte da noi personalmente.

In questi casi la determinazione dell'integrale definito si ottiene con metodi di approssimazione numerica, oppure con metodi grafici, grazie all'utilizzo di particolari strumenti detti planimetri o integrati. Il calcolo numerico di un integrale definito si chiama anche quadratura meccanica e le formule di approssimazione numerica vengono anche dette formule di quadratura e principalmente sono *FORMULA DEI RETTANGOLI*, *FORMULA DEI TRAPEZI* (o di Bèzout), *FORMULA DELLE PARABOLE* (o di Cavalieri-Simpson).

Formula dei rettangoli.

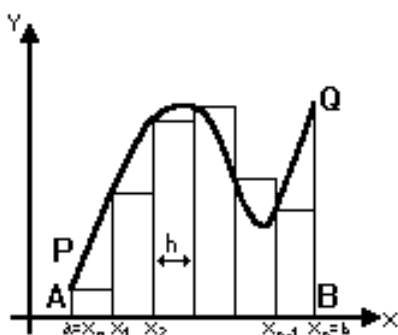


fig. 1a

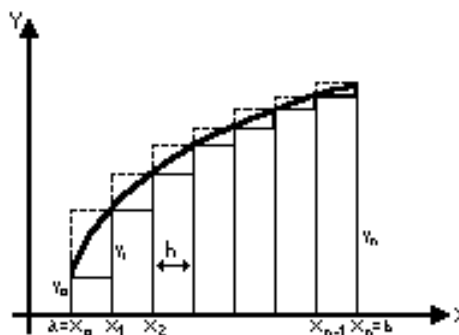


fig. 1b

Si vuole determinare l'area del trapezoide APQB, determinato dalla curva continua di equazione $y=f(x)$, sia $f(x)>0$ per $a<x<b$. La determinazione di quest'area equivale al calcolo dell'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Per avere un valore approssimato di questo integrale si può dire che, se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in "n" intervalli eguali, di ampiezza $h = \frac{(b-a)}{n}$, mediante i punti:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

la funzione $f(x)$ assume negli estremi di tali intervalli i valori:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$$

Considero ora la somma delle singole aree dei rettangoli di base h e di altezza $f(x_j)$.

$$y_0 \cdot h + y_1 \cdot h + y_2 \cdot h + \dots + y_{n-1} \cdot h = h \cdot \sum_0^{n-1} y_i \quad [2]$$

$$y_1 \cdot h + y_2 \cdot h + y_3 \cdot h + \dots + y_n \cdot h = h \cdot \sum_1^n y_i \quad [2']$$

Come si vede le formule 2 e 2' rappresentano rispettivamente, l'area del plurirettangolo formato dall'insieme dei rettangoli che hanno per base gli intervalli parziali considerati e per altezza il valore che la funzione $f(x)$ assume nell'estremo destro e sinistro dell'intervallo parziale corrispondente. Essendo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h \cdot \sum_0^{n-1} y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} h \cdot \sum_1^n y_i = \int_a^b f(x) dx$$

possiamo porre che l'integrale definito sia approssimativamente uguale alla somma 2 o 2'. Quindi:

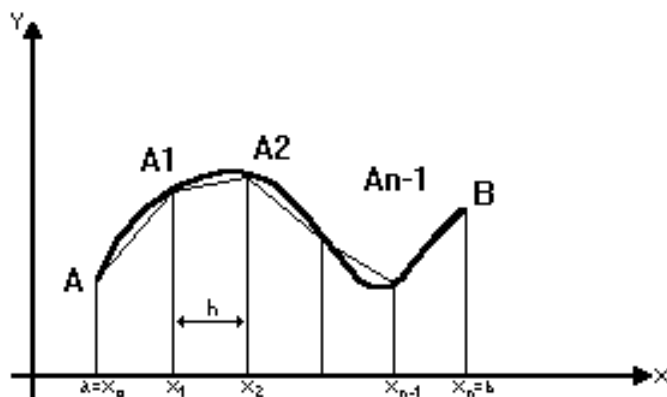
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \quad [3]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) \quad [3']$$

Risulta dalla figura 1b che, se $f(x)$ è una funzione crescente la formula 3 rappresenta l'area del plurirettangolo inscritto alla curva, e che la formula 3' rappresenta l'area del plurirettangolo circoscritto alla curva della funzione.

L'errore commesso calcolando l'integrale secondo la formula dei rettangoli è tanto più piccolo quanto più "n" è grande, cioè quanto più gli intervalli parziali $h = \frac{(b-a)}{n}$ sono piccoli.

Formula dei trapezi (o di Bèzout).



Come si può vedere dalla figura è naturale aspettarsi un valore più preciso dell'integrale definito, se si sostituisce alla funzione $y=f(x)$, non una approssimazione a gradini, ma bensì una curva spezzata. Quindi si prende come approssimazione dell'area del trapezoide (o quadrilatero mistilineo) $aABb$, la somma dei trapezi rettangoli aventi come lati obliqui le corde $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$

Le aree di questi trapezi sono rispettivamente:

$$\frac{[(y_0 + y_1)]}{2} \cdot h, \frac{[(y_1 + y_2)]}{2} \cdot h, \dots, \frac{[(y_{n-1} + y_n)]}{2} \cdot h$$

Quindi si ha :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{[(y_0 + y_1)]}{2} \cdot h + \frac{[(y_1 + y_2)]}{2} \cdot h + \dots + \frac{[(y_{n-1} + y_n)]}{2} \cdot h$$

Svolgendo i calcoli si ottiene la formula desiderata:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n} \cdot \left[\frac{(y_0 + y_n)}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right]$$

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson).

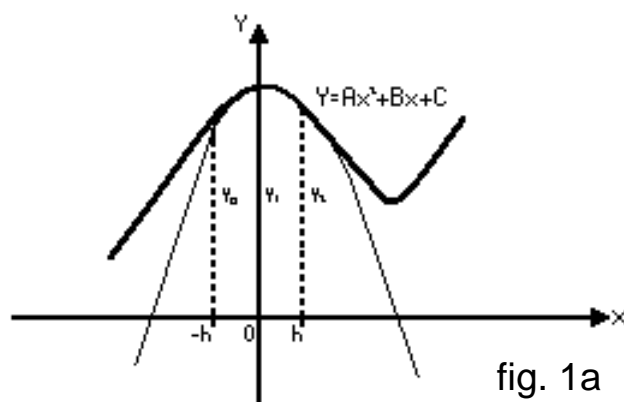


fig. 1a

Teorema delle parabole: un trapezoide delimitato dalla parabola :

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad [1]$$

dall'asse x e da due rette parallele all'asse y e distanti 2h fra loro, ha l'area data da:

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

dove y_0 e y_1 sono le ordinate estreme e y_2 è l'ordinata della curva nel centro del segmento.

Dimostrazione: come si vede dalla figura la parabola passa per i punti di ascissa: $x_0 = -h$; $x_1 = 0$; $x_2 = h$. Se sostituiamo nella funzione [1] i valori di x appena enunciati otteniamo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ 4y_1 = 4C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \quad \text{da cui: } y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Se ora supponiamo di conoscere i coefficienti A,B e C possiamo calcolare l'area del trapezoide, tramite la regola di Torricelli- Barrow per l'integrale definito nell'intervallo $[-h,h]$:

$$S = \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ma dal sistema si vede che $2Ah^2 + 6Ch = y_0 + 4y_1 + y_2$, quindi sostituendo nella formula appena trovata abbiamo dimostrato il teorema sopra enunciato, cioè:

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

E quindi il teorema è dimostrato.

Una volta dimostrato il teorema si procede con il calcolare il valore approssimato dell'integrale della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a,b]$. Cominceremo con dividere l'intervallo totale in un numero pari $2n$ di parti eguali in cui:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$$

Guardando il grafico 1b, si considerino gli intervalli $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $[x_{2n-2}, x_{2n}]$, che hanno tutti la stessa ampiezza pari a:

$$2h = \frac{(b-a)}{n}$$

e che hanno come rispettivi punti di mezzo x_1, x_3, x_{2n-1} .

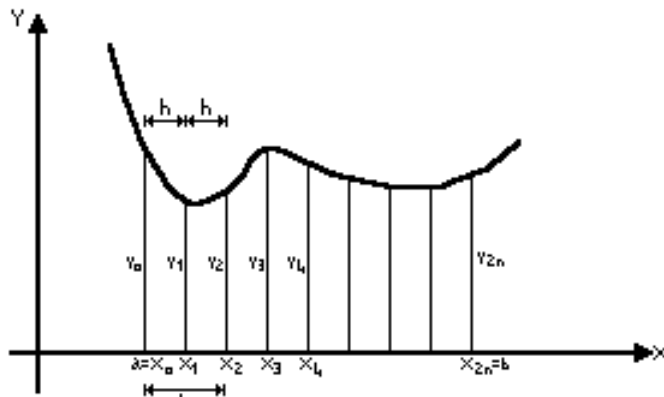


fig. 1b

Se ora applichiamo la formula agli intervalli appena dichiarati si ottengono le approssimazioni:

$$\int_a^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2) ;$$

$$\int_{x_4}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4) ;$$

$$\int_{x_4}^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) ;$$

Se ora sommiamo membro a membro si ottiene che l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ equivale a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6n} \cdot [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]$$

ESEMPIO :

Calcolare approssimativamente :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot dx$$

Dividiamo l'intervallo $[1,2]$ in 10 parti uguali e poniamo:

$$h = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

Formiamo ora la tabella dei valori della funzione integranda:

	x	$y = \frac{1}{x}$
1	x = 1,0	y = 1,00000
2	x = 1,1	y = 0,90909
3	x = 1,2	y = 0,83333
4	x = 1,3	y = 0,76923
5	x = 1,4	y = 0,71429
6	x = 1,5	y = 0,66667
7	x = 1,6	y = 0,62500
8	x = 1,7	y = 0,58824
9	x = 1,8	y = 0,55556
10	x = 2,0	y = 0,50000

I) In base alla *prima formula dei rettangoli* (3), si ottiene:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \cdot (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877$$

e in base alla *seconda formula dei rettangoli* (3'), si ottiene:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877$$

II) In base alla *formula dei trapezi*, si ottiene:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \cdot \left(\frac{1+0,5}{2} + 6,188773 \right) = 0,69377$$

III) In base alla *formula di Simpson*, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \frac{0,1}{3} \cdot [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \\ &= \frac{0,1}{3} \cdot (1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315 \end{aligned}$$

Se si tiene conto che, essendo (con sette cifre *esatte*):

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0,69314472$$

segue che, dividendo l'intervallo $[1,2]$ in dieci parti eguali, la formula di Simpson dà cinque decimali esatti; la formula dei trapezi tre; quella dei rettangoli solo una cifra.

Maggiorazione dell'errore nell'integrazione numerica.

Oltre alle formule per approssimare l'integrale definito esistono anche formule per la maggiorazione dell'errore, applicabili alle formule appena dimostrate che elenchiamo senza dimostrare:

1) Per la formula dei rettangoli, l'errore limite è dato, per ogni n , da:

$$R_n \leq \frac{h}{2} \cdot (b-a) \cdot M_1 \quad \text{dove } M_1 = \max |f'(x)| \text{ per } a \leq x \leq b$$

2) Per la formula dei trapezi l'errore limite è dato, per ogni n , da:

$$R_n \leq h^2 \cdot (b-a) \cdot M_2 \quad \text{dove } M_2 = \max |f''(x)| \text{ per } a \leq x \leq b$$

L'esatto errore della formula dei trapezi è:

$$\varepsilon_t = -h^2 \cdot (b-a) \cdot f''(c) \quad \text{per } a < c < b$$

3) Per la formula di Simpson, l'errore assoluto limite sempre per ogni n pari a:

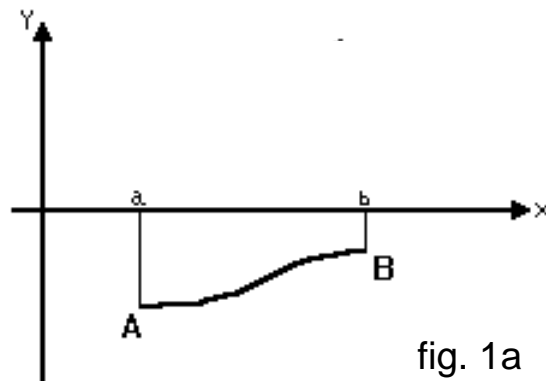
$$R_n \leq h^4 \cdot (b-a) \cdot M_4 \quad \text{dove } M_4 = \max |f^{IV}(x)| \text{ per } a \leq x \leq b$$

Mentre il valore esatto dell'errore commesso, quando si utilizza la formula di Simpson è:

$$\varepsilon_s = -h^4 \cdot (b-a) \cdot f^{IV}(c) \quad \text{per } a < c < b$$

Qualora il calcolo della derivata "IV" sia complicato si utilizza il principio di Rouge, cioè si raddoppia il passo e si calcola la formula di Simpson. Spiegando meglio, devo fare più approssimazioni, aumentando il passo di suddivisione degli intervalli parziali. In questo modo se si ottengono N numeri uguali dopo la virgola, fra i risultati delle diverse approssimazioni, diremo che il numero completo ottenuto sarà la migliore approssimazione.

Integrale di una funzione non positiva.



Fino ad ora sono stati trattati integrali di funzioni positive o nulle nell'intervallo d'integrazione, però il concetto può estendersi anche nel caso di funzioni che all'interno dell'intervallo assumono anche valori negativi. Cominciamo ad esaminare una funzione di equazione $y=f(x)$ che sia, nell'intervallo $[a,b]$ d'integrazione, minore o pari a zero:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

A questo punto se dovessimo applicare alla funzione $f(x)$ uno qualsiasi dei metodi di approssimazione d'integrazione numerica, si otterrebbero delle approssimazioni negative. Ad esempio se applichiamo la formula dei trapezi si avrebbe:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

ma essendo $y_0 = f(x_0) \leq 0, y_1 = f(x_1) \leq 0, \text{ etc...}$, la funzione darebbe come risultato un numero minore o uguale a zero, cioè:

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

Tutto questo equivale a dire che l'area del trapezoide, di figura 1a, è negativa. A questo punto se consideriamo una funzione $f(x)$ che assume nell'intervallo $[a,b]$ valori sia positivi che negativi (fig. 1b), dovrò suddividere l'intervallo in più intervalli, in modo da ottenere valori di $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ nelle diverse suddivisioni.

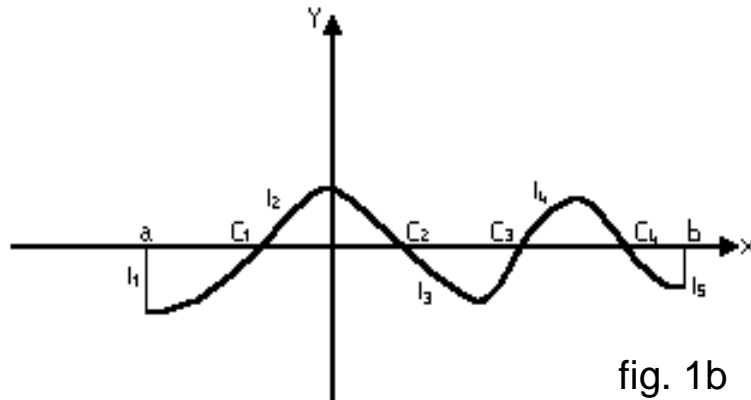


fig. 1b

Indicando con I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , i valori degli integrali trovati nei singoli intervalli, avremo un grafico così composto:

$$I_1 \rightarrow [a, c_1], I_2 \rightarrow [c_1, c_2], I_3 \rightarrow [c_2, c_3], I_4 \rightarrow [c_3, c_4], I_5 \rightarrow [c_4, b]$$

Così facendo posso dire che in ciascun intervallo è possibile determinare l'integrale di $f(x)$: sarà positivo se $f(x) > 0$ e sarà negativa se la $f(x) < 0$.

A questo punto per determinare l'integrale definito nell'intervallo totale $[a,b]$, farò la somma algebrica dei singoli integrali cambiando di segno a quelli che risulterebbero negativi. Nel caso del grafico 1b sarà:

$$\int_a^b f(x)dx = -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5$$

APPLICAZIONE NEL CAMPO FISICO:

Osserviamo, innanzitutto, che se un corpo mobile si muove di moto rettilineo con velocità costante v , lo spazio percorso nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t=a$ all'istante $t=b$, è definita dalla formula:

$$S = v \cdot \Delta t \quad \Delta t = b - a$$

Consideriamo ora un punto che si muove su una data retta in modo che la sua velocità v sia una funzione $f(t)$ variabile nel tempo $v = f(t)$.

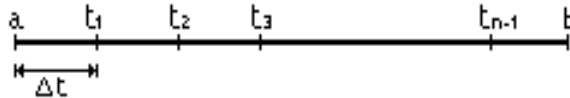
Si vuole calcolare lo spazio percorso del punto all'interno dell'intervallo di tempo Δt .

Quando la velocità non è più costante, ma variabile, per calcolare approssimativamente lo spazio richiesto, si procede dividendo l'intervallo $[a, b]$ in un certo numero di parti eguali mediante gli istanti:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Chiameremo h l'ampiezza comune di questi intervalli parziali, determinato dalla relazione:

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$



Si suppone poi (ed è qui che sta l'approssimazione), che nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ la velocità sia uguale al valore che essa ha nell'istante t_0 , cioè $f(t_0)$; lo stesso per l'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$, cioè la velocità sia uguale a quella nell'istante t_1 , cioè $f(t_1)$, e così via per i successivi intervalli. Con questa approssimazione è facile capire che lo spazio percorso dal punto mobile è:

$$S = f(t_0) \cdot h + f(t_1) \cdot h + f(t_2) \cdot h + \dots + f(t_{n-1}) \cdot h \quad [1]$$

Questo valore sarà tanto più esatto quanto più numerosi saranno gli intervalli parziali in cui è suddiviso l'intervallo $[a, b]$. Quindi la vera misura dello spazio percorso sarà il limite della formula 1 per $n \rightarrow \infty$, cioè sarà l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ di integrazione della $f(t)$, quindi:

$$S = \int_a^b f(t) dt$$

Come si può vedere, in questo caso, il significato di integrale è quello di una lunghezza.

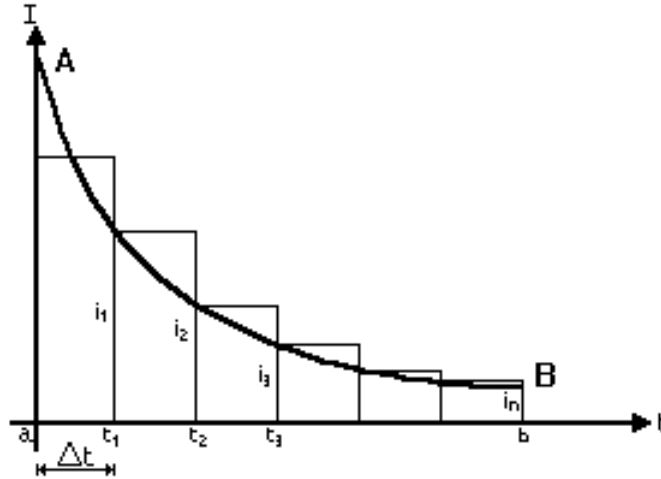
APPLICAZIONE IN CAMPO ELETTRICO:

Per una semplice applicazione dell'integrale nel campo elettrico, studiamo il funzionamento di un circuito CR .

Ricordiamo che le cariche accumulate all'interno di un condensatore sono quelle convogliate nella corrente che circola nel circuito, quindi se in un intervallo di tempo Δt la corrente elettrica fosse costante e di intensità i , la quantità di carica elettrica presente e circolante nel circuito in quell'intervallo sarebbe:

$$i \cdot \Delta t$$

Questa quantità quindi sarebbe la stessa che viene accumulata all'interno del condensatore; però la corrente circolante nel circuito non può essere costante, infatti varia nel tempo (diminuendo). Indichiamo allora con $i(t)$ la corrente in un generico istante t , e rappresentiamo il grafico della $i(t)$.



Suddividiamo ora l'intervallo di tempo totale $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza pari a:

$$\Delta t = \frac{(b-a)}{n} = \frac{b}{n} \quad \text{assunto } a = 0$$

Supponiamo ora che in ciascuno degli intervalli di tempo la corrente sia costante e di intensità pari a quella assunta nell'istante iniziale di ciascun intervallino. Indichiamo così:

$$i_1 \rightarrow [a, t_1], \quad i_2 \rightarrow [t_1, t_2], \quad i_3 \rightarrow [t_2, t_3], \quad \text{etc}$$

Anche in questo caso la carica del condensatore è approssimata all'area del trapezoide $aABb$ e sarà tanto più precisa quanto n sarà grande, quindi per avere il valore esatto dovrei fare il limite per $n \rightarrow \infty$ della formula sopra citata, quindi:

$$\int_a^b i(t) dt$$

Come si può vedere la carica complessiva equivale all'integrale definito della $i(t)$ nell'intervallo di tempo complessivo $[a, b]$.

APPLICAZIONE NEL CAMPO INFORMATICO:

L'integrazione è un altro concetto utilizzato nei calcoli, ed è il procedimento opposto alla derivazione. Infatti la derivazione rivela l'andamento di una funzione, mentre l'integrazione addizionando le informazioni è in grado di risalire alla funzione originale.

L'integrazione è un concetto facilmente conosciuto in termini di area sottostante ad una curva.

Data una funzione $f(x)$ e numeri reali a e b con $a < b$, l'area sottostante alla curva $y=f(x)$ è determinata dall'integrale definito della $f(x)$ nell'intervallo di integrazione $[a,b]$.

In questo campo sono descritti rigorosi metodi che approssimano il valore dell'integrale definito di una funzione reale di variabile reale, purché il limite di integrazione sia finito.

Il metodo dei *trapezoidi* e il metodo di *Simpson* riprendono l'approssimazione dell'integrale quando è specificato un numero di sottointervalli di eguali lunghezza. Per un dato numero di sottointervalli, il metodo di Simpson è preferito a quello dei trapezoidi, tutte le volte che viene studiata una funzione sufficientemente livellata, cioè non oscillante.

E' possibile approssimare alcune volte l'integrale definito a seconda delle accurate specifiche dell'utente con piccole funzioni usando schemi adattivi. Gli schemi adattivi determinano la larghezza dei sottointervalli dei locali funzionamenti della funzione integranda. Il metodo di Simpson e il metodo delle *quadrature Gaussiane* sono usati con gli schemi adattivi. Il metodo delle quadrature Gaussiane, in alcuni casi, permette alla funzione di assumere una singolarità nel punto finale di integrazione; il procedimento di calcolo è utilizzato in ogni punto dell'intervallo escluso però quello finale.

BIBLIOGRAFIA

N. Doderò , P. Baroncini , R. Manfredi.
INTINERARI DI MATEMATICA. vol 3.
Ghisetti e Corvi.

F. Scheid.
ANALISI NUMERICA
Etas.

Turbo Pascal Toolbox
NUMERICAL METHODS
Borland International. 1986